МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

Т. В. Елисеева

Прикладной функциональный анализ

Учебное пособие

Пенза
Издательство ПГУ
2012

УДК 517.9
Е51

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Математика и математическое моделирование» Пензенского государственного университета архитектуры и строительства

А. М. Данилов;

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Физика»
Пензенского государственного университета

В. Д. Кревчик

Елисеева, Т. В.

Е51 Прикладной функциональный анализ : учеб. пособие / Т. В. Елисеева. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2012. – 80 с.

ISBN 978-5-94170-498-9

Описываются и исследуются приближенные методы решения операторных уравнений. Рассматриваются проекционные методы (метод Галеркина, метод моментов и т.д.) и итерационные методы как применительно к приближенному решению линейных и нелинейных уравнений, так и к проблеме собственных значений.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Высшая и прикладная математика», предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика».

УДК 517.9

ISBN 978-5-94170-498-9

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общая теория приближенных методов для линейных операторных уравнений второго рода

Пусть X – полное нормированное пространство, X_n – его подпространство. Обозначим через P_n проектор из X на X_n, т.е. линейный оператор, удовлетворяющий следующим условиям: $P_n(X) = X_n$, $P_n^2 = P_n$. Оператор P_n ставит каждому элементу $x \in X$ в соответствие элемент $x_n \in X_n$, причем $P_n x_n = x_n$.

Рассмотрим точное уравнение

$$Kx \equiv x + Hx = f, \quad K \in [X, X], \tag{1.1}$$

в пространстве X и последовательность приближенных уравнений

$$K_n x_n \equiv x_n + H_n x_n = f_n, \quad K_n \in [X_n, X_n], \tag{1.2}$$

в подпространствах X_n. В этом пункте $f_n = P_n f$. Будем считать, что пространства X и X_n и операторы H и H_n связаны следующими условиями:

I. Условие близости операторов H и H_n. Для любого $x_n \in X_n$ справедливо неравенство

$$\|P_n H x_n - H_n x_n\| \le \varepsilon_1 \|x_n\|.$$

II. Условие аппроксимации элементов Hx элементами из X_n. Для любого $x \in X$ найдется элемент $x_n \in X_n$ такой, что

$$\|Hx - x_n\| \le \varepsilon_2 \|x\|.$$

III. Условие аппроксимации свободного члена точного уравнения. Существует элемент $y_n \in X_n$ такой, что

$$\|f - y_n\| \le \varepsilon_3(f)\|f\|.$$

Запись $\varepsilon_3(f)$ подчеркивает, что оценка в III неравномерна относительно пространства X.

Теорема 1.1 (о разрешимости приближенного уравнения). Пусть выполнены условия I и II, оператор K непрерывно обратим. Тогда если

$$q = \left[\varepsilon_1 + \|I - P_n\|\varepsilon_2\right]\left\|K^{-1}\right\| < 1, \tag{1.3}$$

то оператор K_n также имеет непрерывный обратный K_n^{-1}. При этом

$$\left\|K_n^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|K^{-1}\right\|}{1-q}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Рассмотрим в X оператор $\bar{K} = I + P_n H$. Согласно условию II для произвольного элемента $x \in X$ найдется такой элемент $x_n \in X_n$, что

$$\left\|Hx - x_n\right\| \leq \varepsilon_2 \left\|x\right\|.$$

Тогда

$$\left\|\left(K - \bar{K}\right)x\right\| = \left\|Hx - P_n Hx\right\| = \left\|Hx - x_n + P_n x_n - P_n Hx\right\| =$$

$$= \left\|\left(I - P_n\right)\left(Hx - x_n\right)\right\| \leq \left\|I - P_n\right\| \varepsilon_2 \left\|x\right\|.$$

Так как x – произвольный элемент из X, доказано, что

$$\left\|K - \bar{K}\right\| \leq \left\|I - P_n\right\| \varepsilon_2.$$

Оператор $\bar{K}$ может быть представлен в виде

$$\bar{K} = K\left(I - K^{-1}\left(K - \bar{K}\right)\right), \tag{1.5}$$

причем для оператора $K^{-1}\left(K - \bar{K}\right)$ выполняется оценка

$$\left\|K^{-1}\left(K - \bar{K}\right)\right\| \leq \left\|I - P_n\right\| \varepsilon_2 \left\|K^{-1}\right\| \leq q < 1.$$

По теореме Банаха существует обратный оператор $\left(I - K^{-1}\left(K - \bar{K}\right)\right)^{-1}$ и

$$\left\|\left(I - K^{-1}\left(K - \bar{K}\right)\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \left\|I - P_n\right\| \varepsilon_2 \left\|K^{-1}\right\|}.$$

Из представления (1.5) теперь следует, что оператор $\bar{K}$ обратим,

$$\bar{K}^{-1} = \left(I - K^{-1}\left(K - \bar{K}\right)\right)^{-1} K^{-1},$$

поэтому

$$\left\|\bar{K}^{-1}\right\| \leq \frac{\left\|K^{-1}\right\|}{1 - \left\|I - P_n\right\| \varepsilon_2 \left\|K^{-1}\right\|}. \tag{1.6}$$

В пространстве X_n рассмотрим оператор $\bar{K}^* x_n = x_n + P_n H x_n$. Очевидно, для любого $x_n \in X_n$ $\bar{K}^* x_n = \bar{K} x_n$. Оператор $\bar{K}$ обладает еще и тем свойством, что если $f_n \in X_n$, то $\bar{K}^{-1} f_n \in X_n$. Действительно, если $x' = \bar{K}^{-1} f_n$, то $x' = f_n - P_n H x' \in X_n$. Поэтому оператор $\bar{K}^*$ имеет непрерывный обратный, совпадающий с $\bar{K}^{-1}$ на X_n, и

$$\left\|\bar{K}^{*-1}\right\| \le \left\|\bar{K}^{-1}\right\|. \tag{1.7}$$

Оценим теперь разность $K_n - \bar{K}^*$. По условию I для любого $x_n \in X_n$

$$\left\|K_n x_n - \bar{K}^* x_n\right\| = \left\|P_n H x_n - H_n x_n\right\| \le \varepsilon_1 \left\|x_n\right\|, \tag{1.8}$$

и

$$\left\|K_n - \bar{K}^*\right\| \le \varepsilon_1. \tag{1.9}$$

Поэтому согласно (1.6), (1.7) и (1.9)

$$\left\|\bar{K}^{*-1}\right\| \left\|K_n - \bar{K}^*\right\| \le \frac{\left\|K^{-1}\right\| \varepsilon_1}{1 - \left\|I - P_n\right\| \varepsilon_2 \left\|K^{-1}\right\|} = 1 - \frac{1-q}{1 - \left\|I - P_n\right\| \varepsilon_2 \left\|K^{-1}\right\|} < 1. \tag{1.10}$$

Записывая оператор K_n в виде $K_n = \bar{K}^* \left(I - \bar{K}^{*-1}\left(\bar{K}^* - K_n\right)\right)$ и опять применяя теорему Банаха, доказываем существование обратного оператора K_n^{-1} и оценку

$$\left\|K_n^{-1}\right\| \le \frac{\left\|\bar{K}^{*-1}\right\|}{1 - \left\|\bar{K}^{*-1}\right\| \left\|K_n - \bar{K}^*\right\|} \le \frac{\left(1 - \left\|I - P_n\right\| \varepsilon_2 \left\|K^{-1}\right\|\right) \left\|\bar{K}^{-1}\right\|}{1-q} \le \frac{\left\|K^{-1}\right\|}{1-q}. \tag{1.11}$$

Теорема доказана.

Теорема 1.2 (об оценке погрешности приближенного решения).

Если выполнены условия I–III, существует непрерывный оператор K_n^{-1} (в частности, если выполнены условия теоремы 1.1) и уравнение (1.1) имеет решение x^*, то справедлива оценка

$$\left\| x^* - x_n^* \right\| \le p \left\| x^* \right\|, \tag{1.12}$$

где x_n^* – решение уравнения (1.2), а

$$p = 2\varepsilon_1 \left\| K_n^{-1} \right\| + \left(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \| K \| \right) \left(1 + \left\| K_n^{-1} P_n K \right\| \right). \tag{1.13}$$

Доказательство. Покажем, что условия теоремы позволяют аппроксимировать элемент x^* элементом из X_n с точностью порядка $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Докажем, что существует элемент $x_n \in X_n$ такой, что

$$\left\| x^* - x_n \right\| \le \varepsilon \left\| x^* \right\|, \tag{1.14}$$

где
$$\varepsilon = \min\left\{ 1, \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \| K \| \right\}. \tag{1.15}$$

Действительно, выбирая $f_n \in X_n$ и $z_n \in X_n$ на основании II и III так, чтобы

$$\left\| Hx^* - z_n \right\| \le \varepsilon_2 \left\| x^* \right\|, \ \| f - f_n \| \le \varepsilon_3 \| f \| \le \varepsilon_3 \| K \| \left\| x^* \right\|,$$

и полагая $x_n = y_n - z_n$, будем иметь

$$\left\| x^* - x_n \right\| = \left\| -Hx^* + f - \left(f_n - z_n \right) \right\| \le \left(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \| K \| \right) \left\| x^* \right\|.$$

С другой стороны, (1.14) выполнено при $\varepsilon = 1$, если положить $x_n = 0$. Отсюда и следует, что в качестве ε можно взять (1.15).

Докажем неравенство (1.12). Обозначив $x_0 = K_n^{-1} P_n K x_n$, имеем

$$\left\| x^* - x_n^* \right\| \le \left\| x^* - x_n \right\| + \| x_n - x_0 \| + \left\| x_0 - x_n^* \right\|. \tag{1.16}$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Оценка первого слагаемого (1.14). Для второго на основании условия I

$$\| x_n - x_0 \| = \left\| K_n^{-1} K_n x_n - K_n^{-1} P_n K x_n \right\| \le \left\| K_n^{-1} \right\| \left\| K_n x_n - P_n K x_n \right\| \le \varepsilon_1 \left\| K_n^{-1} \right\| \| x_n \|. \tag{1.17}$$

Но по (1.14)

$$\| x_n \| \le \left\| x^* \right\| + \left\| x^* - x_n \right\| \le (1 + \varepsilon) \left\| x^* \right\|.$$

Подставляя это в (1.17), получим

$$\left\|x_n - x_0\right\| \le \varepsilon_1 (1+\varepsilon)\left\|K_n^{-1}\right\|\left\|x^*\right\|. \tag{1.18}$$

Учитывая, что x_n^* – решение уравнения (1.2) и, следовательно, $x_n^* = K_n^{-1}P_nKx^*$, оценим последнее слагаемое в (1.16). В силу (1.14)

$$\left\|x_0 - x_n^*\right\| = \left\|K_n^{-1}P_nKx_n - K_n^{-1}P_nKx^*\right\| \le \left\|K_n^{-1}P_nK\right\|\left\|x_n - x^*\right\| \le$$

$$\le \varepsilon\left\|K_n^{-1}P_nK\right\|\left\|x^*\right\|.$$

Подставляя эту оценку, (1.14) и (1.18) в (1.16), получим

$$\left\|x^* - x_n^*\right\| \le \left(\varepsilon_1 (1+\varepsilon)\left\|K_n^{-1}\right\| + \varepsilon\left(1 + \left\|K_n^{-1}P_nK\right\|\right)\right)\left\|x^*\right\|. \tag{1.19}$$

Заметим, что $1+\varepsilon \le 2$ и $\varepsilon \le \varepsilon_2 + \varepsilon_3\left\|K\right\|$.

Теорема доказана.

Замечание. По теореме 1.2 получим оценку близости приближенного решения к точному, не использующую данных, относящихся к точному решению. В условиях теоремы при $p < 1$ справедлива оценка

$$\left\|x^* - x_n^*\right\| \le \frac{p}{1-p}\left\|x_n^*\right\|.$$

Действительно, $\left\|x^*\right\| \le \left\|x_n^*\right\| + \left\|x^* - x_n^*\right\|$. Учитывая (1.12), $\left\|x^* - x_n^*\right\| \le p\left\|x_n^*\right\| + p\left\|x^* - x_n^*\right\|$. Отсюда следует искомая оценка.

Теорема 1.3. Если оператор K_n имеет непрерывный обратный, выполнены условия I и II и

$$r = \varepsilon_1 (1+\varepsilon_2)\left\|K_n^{-1}\right\| + \varepsilon_2\left(1 + \left\|K_n^{-1}P_nK\right\|\right) < 1,$$

то оператор K имеет непрерывный левый обратный, норма которого оценивается

$$\left\|K^{-1}\right\| \le \frac{1 + \left\|K_n^{-1}P_n\right\| + \varepsilon_1\left\|K_n^{-1}\right\| + \left\|K_n^{-1}P_nK\right\|}{1-r}.$$

Теорема 1.4. Если выполнены условия:

1) оператор K имеет непрерывный обратный;

2) при каждом $n = 1, 2, \ldots$ выполнены условия I–III, причем

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_1 = 0, \ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_2 \|P_n\| = 0, \ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_3 \|P_n\| = 0, \qquad (1.20)$$

то при достаточно больших n приближенные уравнения разрешимы и имеет место сходимость последовательности приближенных решений к точному:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x^* - x_n^* \right\| = 0.$$

Точнее,

$$\left\| x^* - x_n^* \right\| \le Q_1\varepsilon_1 + Q_2\varepsilon_2 \|P_n\| + Q_3\varepsilon_3 \|P_n\|, \qquad (1.21)$$

где Q_1, Q_2, Q_3 – некоторые постоянные.

Доказательство. Так как $\|P_n\| \ge 1$, то из (1.20) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_2 = 0$, и поэтому для достаточно больших n в теореме 1.1 будет $q < \dfrac{1}{2}$. Таким образом, для указанных n существует непрерывный оператор K_n^{-1}, причем

$$\left\| K_n^{-1} \right\| \le \frac{\left\| K^{-1} \right\|}{1-q} < 2\left\| K^{-1} \right\|.$$

Видно, что $\left\| K_n^{-1} \right\|$ ограничена независимо от n. Учитывая это, на основании оценки (1.12) в теореме 1.2 получим (1.21).

Теорема доказана.

В некоторых случаях приближенное уравнение того или иного метода рассматривается не в подпространстве пространства X, а в другом пространстве $\bar{X}$, изоморфном некоторому подпространству основного пространства X.

Пусть в полном подпространстве $X_n \subset X$ определен непрерывный линейный оператор φ_0, отображающий X_n взаимно однозначно на полное пространство $\bar{X}$. Эти условия обеспечивают непрерывность обратного оператора φ_0^{-1}. Пусть существует непрерывный линейный оператор φ, отображающий X на $\overline{X}$ и совпадающий с φ_0 на X_n. В качестве φ можно взять

$$\varphi = \varphi_0 P_n. \tag{1.22}$$

Отсюда

$$P_n = \varphi_0^{-1}\varphi. \tag{1.23}$$

Обозначим через $\overline{H}$ оператор, отображающий пространство $\overline{X}$ в себя,

$$\overline{H} = \varphi_0 H_n \varphi_0^{-1}. \tag{1.24}$$

Для приближенного уравнения $K_n x_n \equiv x_n + H_n x_n = f_n$ в X_n запишем ему эквивалентное в $\overline{X}$

$$\overline{K}\overline{x} \equiv \overline{x} + \overline{H}\overline{x} = \overline{f}\,,\ \overline{K} = \varphi_0 K_n \varphi_0^{-1}. \tag{1.25}$$

Условие I сформулируем в новых терминах.

Ia. Для любого $x_n \in X_n$ имеет место неравенство

$$\left\| \overline{H}\varphi_0 x_n - \varphi H x_n \right\| \le \overline{\varepsilon} \left\| x_n \right\|.$$

Условия II и III не изменятся, так как не содержат операторов H_n и P_n.

Теорема 1.1а. Пусть выполнены условия Ia и II, и оператор K имеет непрерывный обратный. Тогда, если

$$\overline{q} = \left(\overline{\varepsilon} \left\| \varphi_0^{-1} \right\| + \left\| I - \varphi_0^{-1}\varphi \right\| \varepsilon_2 \right) \left\| K^{-1} \right\| < 1, \tag{1.26}$$

то $\overline{K}$ также имеет непрерывный обратный $\overline{K}^{-1}$. При этом

$$\left\| \overline{K}^{-1} \right\| \le \frac{\left\| K^{-1} \right\| \left\| \varphi_0 \right\| \left\| \varphi_0^{-1} \right\|}{1 - \overline{q}}. \tag{1.27}$$

Теорема 1.2а. Если выполнены условия Iа, II, III, существует непрерывный оператор $\overline{K}^{-1}$, уравнение $Kx \equiv x + Hx = f$ имеет решение x^*, то справедлива оценка

$$\left\| x^* - \varphi_0^{-1}\overline{x}^* \right\| \le \overline{p}\left\| x^* \right\|, \tag{1.28}$$

где
$$\overline{p} = 2\overline{\varepsilon}\left\|\varphi_0^{-1}\right\|\left\|\varphi_0^{-1}\overline{K}^{-1}\varphi_0\right\| + \left(\varepsilon_2 + \varepsilon_3\left\|K\right\|\right)\left(1 + \left\|\varphi_0^{-1}\overline{K}^{-1}\varphi K\right\|\right). \tag{1.29}$$

Теорема 1.4а. Если выполнены условия:

1) оператор K имеет непрерывный обратный;
2) при каждом $n = 1, 2, \ldots$ выполнены условия Iа, II, III, причем

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\varepsilon}\left\|\varphi_0^{-1}\right\| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_2\left\|\varphi_0^{-1}\varphi\right\| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_3\left\|\varphi_0^{-1}\varphi\right\| = 0, \tag{1.30}$$

то при достаточно больших n приближенное уравнение (1.25) разрешимо и имеет место сходимость последовательности приближенных решений к точному. При этом

$$\left\| x^* - x_n^* \right\| \le \overline{Q}_1\overline{\varepsilon}\left\|\varphi_0^{-1}\right\| + \overline{Q}_2\varepsilon_2\left\|\varphi_0^{-1}\varphi\right\| + \hat{\overline{Q}}_3\varepsilon_3\left\|\varphi_0^{-1}\varphi\right\|, \tag{1.31}$$

где $x_n^* = \varphi_0^{-1}\overline{x}_n^*$, $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$, $\overline{Q}_3$ – некоторые постоянные.

2. Применение общей теории приближенных методов для линейных уравнений к бесконечным системам алгебраических уравнений. Метод редукции

Пусть дана бесконечная система уравнений

$$\xi_j + \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\xi_k = b_j, \quad j = 1,2,\ldots, \tag{2.1}$$

в предположении, что

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \left|a_{jk}\right|^2 < \infty, \ \sum_{j=1}^{\infty} \left|b_j\right|^2 < \infty. \tag{2.2}$$

Требуется найти решение этой системы, удовлетворяющее условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\xi_k\right|^2 < \infty. \tag{2.3}$$

Метод редукции состоит в замене бесконечной системы (2.1) системой из n уравнений с n неизвестными

$$\xi_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k = b_j, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{2.4}$$

Решение этой системы рассматривается как приближенное решение системы (2.1).

Для применения общей теории примем $X = l^2$ – пространство числовых последовательностей. Система (2.1) запишется в виде уравнения в X

$$Kx \equiv x + Hx = f, \ x = \{\xi_k\}, \ f = \{b_k\}. \tag{2.5}$$

H – непрерывный линейный (и компактный) оператор в l^2, определяемый матрицей системы

$$z = Hx, \ \zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\xi_k, \quad j = 1,2,\ldots, \ x = \{\xi_k\}, \ z = \{\zeta_k\}.$$

За $\overline{X}$ примем конечномерное евклидово пространство l_n^2. За X_n возьмем совокупность элементов из l^2, все координаты которых, начиная с $(n+1)$-й, равны 0. Оператор φ сопоставляет элементу $x=\{\xi_k\}$ элемент $\bar{x}=\varphi x=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in l_n^2$.

$$\|\varphi\|=\|\varphi_0\|=\left\|\varphi_0^{-1}\right\|=1.$$

Систему (2.4) можно записать в виде уравнения в пространстве $\bar{X}$

$$\bar{K}\bar{x}\equiv\bar{x}+\bar{H}\bar{x}=\bar{f}, \tag{2.6}$$

где оператор $\bar{H}$ определяется «усеченной матрицей»

$$A_n=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условий Ia, II, III.

Для произвольного $x_n=(\xi_1,\ldots,\xi_n,0,\ldots)\in X_n$ имеем

$$\bar{z}=\varphi H x_n-\bar{H}\varphi_0 x_n,\ \bar{z}=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n),$$

$$\zeta_j=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k-\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k=0,\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Условие Ia выполнено с $\bar{\varepsilon}=0$.

Возьмем произвольное $x=\{\xi_k\}\in l^2$ и положим $y_n=[Hx]_n=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n,0,\ldots)$. Тогда

$$\|Hx-y_n\|=\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{jk}\xi_k\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\le\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{jk}\right|^2\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}=\varepsilon_2\|x\|,$$

где $\varepsilon_2=\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{jk}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$. По условию (2.2) видно, что $\varepsilon_2\to 0$ при $n\to\infty$. Условие II выполняется.

Полагая $f_n=[f]_n$, имеем

$$\|f - f_n\| = \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \left|b_j\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \left|b_j\right|^2}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left|b_j\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}} \|f\|,$$

и в условии III можно принять

$$\varepsilon_3 = \left[\frac{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \left|b_j\right|^2}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left|b_j\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$\varepsilon_3 \to 0$ при $n \to \infty$. Условие III выполняется.

Таким образом, изложенная выше общая теория применима.

Быстрота сходимости приближенных решений к точному определяется неравенством

$$\left\|x^* - \varphi_0^{-1}\overline{x}_n^*\right\| \le Q_1\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{jk}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} + Q_2\left[\frac{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \left|b_j\right|^2}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left|b_j\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $x^* = \left(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*, \dots\right)$ – решение системы (2.1); $\overline{x}_n^* = \left(\overline{\xi}_1^{(n)}, \dots, \overline{\xi}_n^{(n)}\right)$ – решение системы (2.4). ξ_k^* мало отличается от $\overline{\xi}_k^{(n)}$ для $k = 1, \dots, n,$ а при $k > n$ координата ξ_k^* мала. Имеет место сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k^*, \quad k = 1, 2, \dots .$$

3. Общая теория приближенных методов для обратимых справа операторов

Лемма Канторовича. Пусть V – линейная операция из B-пространства X в B-пространство Y и пусть для каждого $y \in Y$ существует такой $x \in X$, что

$$\left\| V(x) - y \right\| \le q \left\| y \right\|; \quad \left\| x \right\| \le N \left\| y \right\|, \tag{3.1}$$

где $q < 1$ и N – постоянные. Тогда уравнение

$$V(x) = y \tag{3.2}$$

при любом $y \in Y$ имеет решение $x \in X$, удовлетворяющее неравенству

$$\left\| x \right\| \le \frac{N}{1-q} \left\| y \right\|. \tag{3.3}$$

Доказательство. Точное решение уравнения (3.2) построим методом исчерпывания.

Положим $y_1 = y$. По условию найдется такое $x_1 \in X$, что

$$\left\| V(x_1) - y_1 \right\| \le q \left\| y_1 \right\|; \quad \left\| x_1 \right\| \le N \left\| y_1 \right\|.$$

Обозначим $y_2 = y_1 - V(x_1)$. По y_2, опять используя условие, найдем x_2 так, что

$$\left\| V(x_2) - y_2 \right\| \le q \left\| y_2 \right\| \le q^2 \left\| y_1 \right\|; \quad \left\| x_2 \right\| \le Nq \left\| y_1 \right\|.$$

Продолжая этот процесс, построим последовательности $\{y_n\}$ и $\{x_n\}$ такие, что

$$y_{k+1} = y_k - V(x_k), \quad k = 1,2,..., \tag{3.4}$$

$$\left\| y_k \right\| \le q^{k-1} \left\| y_1 \right\|; \quad \left\| x_k \right\| \le Nq^{k-1} \left\| y_1 \right\|. \tag{3.5}$$

Суммируя равенства (3.4), получаем

$$y_{n+1} = y_1 - V(x_1 + x_2 + ... + x_n), \quad n = 1, 2, ... \tag{3.6}$$

Ряд $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$, очевидно, сходится. Обозначая его сумму через x, имеем

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq N \|y\| \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{N}{1-q} \|y\|.$$

С другой стороны, поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$, переход к пределу в (3.6) дает

$$0 = y - V(x),$$

т.е. x – решение уравнения (3.2), удовлетворяющее требуемому условию.

Лемма доказана.

Приведем вспомогательные утверждения.

Множество $E \subset X$ называется множеством первой категории, если E можно представить в виде объединения счетного семейства нигде не плотных множеств.

Множество $E \subset X$, не являющееся множеством первой категории, называется множеством второй категории (в X).

Пусть X – нормированное пространство, X_0 – его подпространство.

Объединим элементы из X в классы, относя два элемента x_1 и x_2 в один класс, если $x_1 - x_2 \in X_0$. При этом, очевидно, различные классы не содержат общих элементов и каждый элемент $x \in X$ входит в один и только один класс. Пусть $\overline{x}$ – один из классов и $x \in \overline{x}$. Тогда $\overline{x} = x + X_0$.

В множестве X / X_0 всех классов можно ввести арифметические операции, полагая

$$\overline{x} + \overline{y} = x + y + X_0, \ \lambda\overline{x} = \lambda x + X_0.$$

Эти определения не зависят от выбора элементов x и y – представителей классов $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Поэтому X / X_0 является линейным пространством, которое называется фактор-пространством.

Пусть X и Y – B-пространства, X_n и Y_n – соответственно их подпространства. Пусть P_n – линейный оператор, проектирующий Y на Y_n.

Рассмотрим линейные уравнения: точное

$$Kx = y, \quad K \in [X \to Y], \tag{3.7}$$

и последовательность приближенных

$$K_n x_n = y_n, \quad K_n \in [X_n \to Y_n]. \tag{3.8}$$

На указанные операторы и пространства наложим следующие условия:

I. Для любого $x_n \in X_n$

$$\|P_n K x_n - K_n x_n\| \le \varepsilon_1(n)\|x_n\|.$$

II. Если x_n^0 – решение уравнения $Kx = y_n$, то существует такое $x_n \in X_n$, что

$$\left\|x_n^0 - x_n\right\| \le \varepsilon_2(n)\left\|x_n^0\right\|.$$

Теорема 3.1. Пусть уравнение (3.7) разрешимо при любой правой части $y \in Y$, выполнены условия I, II, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_1 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_2 \|P_n\| = 0$. Тогда существует такое *N*, что при $n \ge N$ уравнение (3.8) имеет решение x_n^* при любой правой части, причем

$$\left\|x_n^*\right\| \le M \frac{\|y_n\|}{1-q},$$

где $M = 2(1+\varepsilon_2)\left\|\bar{K}^{-1}\right\|$; $q = 2\left[\varepsilon_1(1+\varepsilon_2) + \varepsilon_2\|P_n K\|\right]\left\|\bar{K}^{-1}\right\|$; $\bar{K}$ – оператор, отображающий фактор-пространство X / X_0 на *Y*. Через X_0 обозначено пространство нулей оператора *K*.

Доказательство. Так как оператор *K* отображает *X* на *Y*, *Y* – это *B*-пространство и, следовательно, множество второй категории в себе, то по теореме Банаха оператор *K* осуществляет гомеоморфизм пространства *X* на *Y*. Поэтому существует такое решение x_n^0 уравнения $Kx = y_n$, что $Kx_n^0 = y_n$ и $\left\|x_n^0\right\| \le 2\left\|\bar{K}^{-1}\right\|\|y_n\|$. Из условия II следует существование такого x_n, что

$$\|x_n\| \le 2(1+\varepsilon_2)\left\|\bar{K}^{-1}\right\|\|y_n\|.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left\|K_n x_n - y_n\right\| \le 2\left[\varepsilon_1\left(1+\varepsilon_2\right)+\varepsilon_2\left\|P_n K\right\|\right]\left\|\bar{K}^{-1}\right\|\left\|y_n\right\| = q\left\|y_n\right\|. \qquad (3.9)$$

В самом деле

$$\left\|K_n x_n - y_n\right\| = \left\|K_n x_n - P_n K x_n + P_n K x_n - P_n K x_n^0\right\| \le$$
$$\le \varepsilon_1\left\|x_n\right\| + \left\|P_n K\right\|\left\|x_n - x_n^0\right\|$$

Отсюда следует справедливость неравенства (3.9).

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_1 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_2\left\|P_n\right\| = 0$, то при достаточно больших n $q<1$ и выполняется условие леммы Канторовича, из которой следуют утверждения теоремы.

4. Приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма методом коллокации

Рассмотрим линейное уравнение второго рода

$$x = Hx + f, \tag{4.1}$$

где H – линейный непрерывный оператор в некотором банаховом пространстве E. Пусть $\{E_n\}$ – последовательность замкнутых подпространств пространства E. Пусть при каждом n задан линейный (вообще говоря, неограниченный) проектор P_n, проектирующий свою область определения $D(P_n) \subset E$ на E_n $\left(E_n \subset D(P_n)\right)$. Будем считать, что $f \in D(P_n)$ и $HE \subset D(P_n)$. Тогда решения уравнения (4.1), если они существуют, также принадлежат $D(P_n)$. Предполагается, что каждый оператор $P_n H$ ограничен в E.

Так как $P_n x_n = x_n$ для $x_n \in E_n$, то *метод Галеркина*

$$P_n\left(x_n - Hx_n - f\right) = 0,\ x_n \in E_n,$$

приводит к следующему уравнению:

$$x_n = P_n H x_n + P_n f. \tag{4.2}$$

Обозначим $P^{(n)} = I - P_n$, где I – тождественный оператор.

Теорема 4.1. Пусть оператор $I - H$ непрерывно обратим и пусть $\left\|P^{(n)}H\right\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда при достаточно больших n уравнение (4.2) имеет единственное решение x_n. Последовательность $\{x_n\}$ тогда и только тогда стремится к решению x_0 уравнения (4.1), когда $P^{(n)} f \to 0$ при $n \to \infty$. Справедлива оценка

$$c_1\left\|P^{(n)}x_0\right\| \le \left\|x_n - x_0\right\| \le c_2\left\|P^{(n)}x_0\right\|, \quad c_1, c_2 = \text{const} > 0, \tag{4.3}$$

а при условии ограниченности проекторов P_n – оценка

$$\left\|x_n - x_0\right\| \le c\left\|P_n\right\|\rho\left(x_0, E_n\right), \quad c = \text{const}, \tag{4.4}$$

где
$$\rho\left(z, E_n\right) = \inf_{z_n \in E_n}\left\|z - z_n\right\|.$$

Пусть проектор P_n действует следующим образом:

$$P_n y = y_n,$$

где $y_n = \sum_{k=1}^{n} y(t_k)\psi_k(t)$, $\psi_k(t_j) = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$ $y(t) \in C[a,b]$.

$$\|P_n y\| = \|y_N\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} y(t_k)\psi_k(t) \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|y(t_k)\psi_k(t)\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |y(t_k)| \|\psi_k(t)\| \leq \|y(t)\| \sum_{k=1}^{n} \|\psi_k(t)\|.$$

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$Kx \equiv x(t) + \int_0^{2\pi} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{4.5}$$

Пусть функции $h(t,\tau)$ и $x(t)$ периодические с периодом 2π. Решение уравнения будем искать в виде интерполяционного многочлена Лагранжа

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} x_k \psi_k(t),$$

где $\psi_k(t) = \dfrac{(t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\ldots(t-t_{2n})}{(t_k-t_0)(t_k-t_1)\ldots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\ldots(t_k-t_{2n})}$, $x_k = x(t_k)$,

по равноотстоящим узлам $t_k = \dfrac{2\pi k}{2n+1}$, $k = \overline{0,2n}$, с неизвестными x_k.

Решение ищем *методом коллокации* (совпадений). Метод заключается в том, что коэффициенты x_k определяются из условия обращения в нуль невязки $Kx_n - f$ в фиксированных точках t_k (узлах интерполяции), т.е. из уравнений

$$x_n(t_k) + \int_0^{2\pi} h(t_k,\tau)x_n(\tau)d\tau = f(t_k),\ k = \overline{0,2n}. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.5) в операторном виде может быть записано как $x + Hx = f$. Система уравнений (4.6) равносильна уравнению $x_n + P_n H x_n = P_n f$. Требуется показать, что $\left\| P^{(n)} H \right\| \to 0$ и $\left\| P^{(n)} f \right\| \to 0$ при $n \to \infty$ (самостоятельно).

5. Приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма методом механических квадратур

Рассмотрим уравнение

$$x = Hx + f, \tag{5.1}$$

где H – линейный непрерывный оператор в банаховом пространстве E. Пусть $\{E_n\}$ – последовательность замкнутых подпространств E. В качестве приближенных решений уравнения (5.1) принимаются решения уравнений

$$x_n = H_n x_n + f_n, \tag{5.2}$$

где H_n – линейный непрерывный оператор в E_n, $f_n \in E_n$.

Характеристикой близости уравнений (5.1) и (5.2) не может служить разность операторов H и H_n, так как эти операторы действуют в различных пространствах. Пусть P_n – проектор (вообще говоря, неограниченный), проектирующий в подпространство E_n:

$$P_n z \in E_n \text{ для } z \in D(P_n),\ P_n z_n = z_n \text{ для } z_n \in E_n \subset D(P_n).$$

Пусть $f \in D(P_n)$, $HE \subset D(P_n)$, $P_n H$ – ограниченный в E (а значит, и в E_n) оператор. Каждый из операторов H и H_n можно сравнивать с $P_n H$, рассматривая его соответственно как оператор в E или в E_n. Таким образом, характеристиками близости уравнений (5.1) и (5.2) естественно брать норму оператора $S_n = H_n - P_n H$ в E_n и норму оператора $U_n = H - P_n H$ в E, а также нормы $\|f_n - P_n f\|$ и $\|f - P_n f\|$. Другими словами, каждое из уравнений (5.1) и (5.2) сравнивается с уравнением Галеркина

$$x_n = P_n H x_n + P_n f. \tag{5.3}$$

Последнее уравнение, в отличие от уравнений (5.1) и (5.2), может рассматриваться как в пространстве E, так и в подпространстве E_n.

Уравнение (5.2) иногда удобнее записывать в форме

$$x_n = P_n H x_n + S_n x_n + P_n f + g_n, \tag{5.4}$$

где S_n и $g_n = f_n - P_n f$ характеризуют отклонение уравнения (5.2) от уравнения Галеркина (5.3). Рассматриваются случаи, когда эти отклонения малы ($\|S_n\| \to 0, \quad \|g_n\| \to 0$). Соответствующие приближенные методы объединяют под названием *метод Галеркина с возмущениями* (например, метод механических квадратур).

Лемма 5.1. Пусть банахово пространство E' непрерывно вложено в *E*, т.е. $E' \subset E$, $\|x\|_E \le c\|x\|_{E'}$ $(x \in E')$. Пусть *H* вполне непрерывен, как оператор из *E* в E', а проекторы P_n ограничены, как операторы из E' в *E*, причем $P_n \to P$ сильно, где *P* – оператор вложения пространства E' в *E*. Тогда $\left\|P^{(n)}H\right\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Укажем достаточные условия для того, чтобы из обратимости оператора $I - \mu H$ следовала обратимость оператора $I - \mu H_n$ и наоборот. Числовой параметр μ введен для использования этих условий в разделе 14. При $\mu = 1$ получаем условия однозначной разрешимости уравнений (5.1) и (5.2).

Лемма 5.2. Пусть оператор $I - \mu H$ непрерывно обратим в *E*, $\left\|(I - \mu H)^{-1}\right\| \le \chi$, и пусть $q_n \equiv |\mu|\chi\left(\|S_n\| + \|U_n\|\right) < 1$. Тогда оператор $I - \mu H_n$ непрерывно обратим в E_n и

$$\left\|(I - \mu H_n)^{-1}\right\| \le \frac{\chi}{1 - q_n}.$$

Лемма 5.3. Пусть оператор $I - \mu H_n$ непрерывно обратим в E_n, $\left\|(I - \mu H_n)^{-1}\right\| \le \chi_n$, и пусть $q_n' \equiv |\mu|\left(\chi_n\|S_n\| + \tau_n\|U_n\|\right) < 1$, где $\tau_n = 1 + |\mu|\chi_n\|P_n H\|$. Тогда оператор $I - \mu H$ непрерывно обратим в *E* и

$$\left\|(I - \mu H)^{-1}\right\| \le \frac{\tau_n}{1 - q_n'}.$$

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_a^b z(s)\,ds = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} z\left(s_{jn}\right) + R_n(z) \tag{5.5}$$

с остаточным членом $R_n(z)$, коэффициенты $\alpha_{jn} > 0$, узлы интерполяции

$$a \le s_{1n} < s_{2n} < \ldots < s_{nn} \le b.$$

Обозначим $\beta_{jn}=\dfrac{b-a}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{jn}}\cdot\alpha_{jn},\beta_{jn}>0,$ очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{jn}=b-a.$

Разделим отрезок $[a,b]$ на n непересекающихся интервалов:

$$J_{1n}=[a,a+\beta_{1n}),\quad J_{2n}=[a+\beta_{1n},a+\beta_{1n}+\beta_{2n}),\ldots,\quad J_{nn}=[b-\beta_{nn},b].$$

Введем подмножества

$$D_{jn}=\left(J_{jn}\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\{s_{in}\}\right)\cup\{s_{jn}\},\quad j=\overline{1,n},$$

$\{s_{jn}\}$ означает одноэлементное множество, состоящее из числа s_{jn}. При этом

$$\bigcup_{j=1}^{n}D_{jn}=[a,b],\quad D_{jn}\cap D_{in}=\varnothing \text{ при } i\neq j,$$

$$mes\,D_{jn}=mes\,J_{jn}=\beta_{jn},\quad j=\overline{1,n}. \tag{5.6}$$

Лемма 5.4. Пусть квадратурный процесс (5.5) сходится, т.е. $R_n(z)\to 0$ при $n\to\infty$ для любой непрерывной на $[a,b]$ функции $z(s)$. Тогда диаметры подмножеств D_{jn} стремятся к нулю $\max\limits_{1\le j\le n}\sup\limits_{s',s''\in D_{jn}}|s'-s''|\to 0$ при $n\to\infty$.

Теорема 5.1 (теорема сходимости для линейных уравнений).

Пусть оператор $I-H$ непрерывно обратим в E и пусть $\|S_n\|\to 0$, $\|U_n\|\to 0$, $\|f_n-P_nf\|\to 0$, $\|f-P_nf\|\to 0$ при $n\to\infty$, где $S_n=H_n-P_nH$, $U_n=H-P_nH$ – операторы в E_n и E соответственно. Тогда при достаточно больших n уравнение

$$x_n=H_nx_n+f_n$$

имеет единственное решение x_n^*, и последовательность $\{x_n^*\}$ стремится по норме к решению x^* уравнения

$$x=Hx+f\,.$$

Справедливы оценки

$$\left\|x_n^* - x^*\right\| \le c\left(\|g_n\| + \|S_n\|\left\|P_n x^*\right\| + \left\|P^{(n)} x^*\right\|\right), \tag{5.7}$$

$$c_1 \varepsilon_n \le \left\|x_n^* - P_n x^*\right\| \le c_2 \varepsilon_n, \tag{5.8}$$

где c, c_1, c_2 – не зависящие от n и f положительные постоянные, $g_n = f_n - P_n f$, $\varepsilon_n = \left\|g_n + (H_n P_n - P_n H) x^*\right\|$.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$x(t) = \int_a^b h(t,s) x(s) ds + f(t). \tag{5.9}$$

Будем предполагать, что ядро $h(t,s)$ непрерывно в квадрате $a \le t, s \le b$, а свободный член $f(t)$ – на отрезке $[a,b]$.

Исходя из квадратурной формулы (5.5), будем вместо решения $x_0(t)$ уравнения (5.9) искать его значения $x_0(s_{jn})$ в узлах интерполяции s_{jn}. Приближенные значения $\xi_{jn} \approx x_0(s_{jn})$ определим из системы уравнений

$$\xi_{in} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} h(s_{in}, s_{jn}) \xi_{jn} + f(s_{in}),\ i = 1,...,n. \tag{5.10}$$

Эта система получается из уравнения (5.9), если интеграл $\int_a^b h(t,s) x(s) ds$ заменить квадратурной формулой согласно формуле (5.5), в которой отбрасывается остаточный член, и придать затем переменной t последовательно значения $s_{1n}, s_{2n}, \ldots, s_{nn}$.

Теорема 5.2. Пусть уравнение (5.9) имеет единственное непрерывное решение $x_0(t)$. Пусть квадратурный процесс (5.5) сходится. Тогда при достаточно больших n система уравнений (5.10) имеет единственное решение $(\xi_{1n}, \xi_{2n}, \ldots, \xi_{nn})$ и

$$\max_{1 \le j \le n} \left|\xi_{jn} - x_0(s_{jn})\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{5.11}$$

Быстрота сходимости характеризуется неравенствами

$$c_1 r_n \le \max_{1\le j\le n}\left|\xi_{jn} - x_0\left(s_{jn}\right)\right| \le c_2 r_n, \tag{5.12}$$

где $c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0$,

$$r_n = \max_{1\le i\le n}\left|R_n\left(z_{in}\right)\right|,\ z_{in}(s) = h\left(s_{in}, s\right)x_0(s),$$

$R_n(z)$ – остаточный член квадратурной формулы (5.5).

Доказательство. Интегральное уравнение (5.9) будем рассматривать как операторное уравнение $x = Hx + f$ в банаховом пространстве *E* ограниченных и измеримых на $[a,b]$ функций $x(t)$,

$$\|x\| = \sup_{a\le t\le b}|x(t)|.$$

Непрерывность ядра $h(t,s)$ влечет за собой полную непрерывность оператора $Hx = \int_a^b h(t,s)x(s)ds$ как оператора из *E* в пространство *C* непрерывных на $[a,b]$ функций. Тем более *H* вполне непрерывен как оператор в *E*. Оператор $I - H$ обратим в *E*. Действительно, из $x_1 \in E$, $x_1 = Hx_1$, следует $x_1 \in C$, так как *H* переводит *E* в *C*. Но так как уравнение (5.9) имеет единственное непрерывное решение, то $x_1 = 0$, в чем и нужно было убедиться.

Обозначим через $\chi_{jn}(s)$ характеристическую функцию множества D_{jn}:

$$\chi_{jn}(s) = \begin{cases} 1 & \text{ï ðè} \quad s \in D_{jn}, \\ 0 & \text{ï ðè} \quad s \notin D_{jn}, \end{cases} \quad j = 1,\ldots,n.$$

Пусть E_n – линейная оболочка функций $\chi_{jn}(s)$, $j = 1,\ldots,n$. Очевидно, E_n – замкнутое подпространство в *E*. Из линейной независимости функций $\chi_{jn}(s)$, $j = 1,\ldots,n$, следует, что система уравнений (5.10) равносильна уравнению $x_n = H_n x_n + f_n$, в котором

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(s_{in}\right)\chi_{in}, \tag{5.13}$$

$$H_n z_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jn} h\left(s_{in}, s_{jn}\right)\zeta_j\right)\chi_{in},\ z_n = \sum_{j=1}^{n}\zeta_j\chi_{jn} \in E_n. \tag{5.14}$$

Равносильность понимается в следующем смысле: вектор $\left(\xi_{1n},\xi_{2n},\ldots,\xi_{nn}\right)$ будет решением системы (5.10) тогда и только тогда, когда $x_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_{jn}\chi_{jn}$ будет решением уравнения $x_n=H_nx_n+f_n$.

Для того чтобы применить теорему 5.1, введем проектор P_n, проектирующий E на E_n. Зададим P_n формулой

$$P_nx=\sum_{j=1}^{n}x\left(s_{jn}\right)\chi_{jn},\qquad x\in E.$$

Из (5.6) следует, что $P_nE=E_n$ и $P_nz_n=z_n$ для $z_n\in E_n$, т.е. что P_n действительно является проектором. Проектор P_n ограничен, $\left\|P_n\right\|=1$. В силу леммы 5.4 для любой непрерывной (а значит, и равномерно непрерывной) на $\left[a,b\right]$ функции $z\left(s\right)$ имеем

$$\max_{a\le s\le b}\left|z\left(s\right)-\sum_{j=1}^{n}z\left(s_{jn}\right)\chi_{jn}\left(s\right)\right|=\max_{1\le j\le n}\sup_{s\in D_{jn}}\left|z\left(s\right)-z\left(s_{jn}\right)\right|\to 0$$

при $n\to\infty$, т.е. последовательность проекторов P_n (как операторов из C в E) сильно стремится к оператору вложения C в E. Так как H вполне непрерывен как оператор из E в C, получаем на основе леммы 5.1

$$\left\|U_n\right\|\to 0 \text{ при } n\to\infty \ \left(U_n=H-P_nH\right).$$

$f_n=P_nf$ (см. (5.13)), $\left\|f-P_nf\right\|\to 0$ при $n\to\infty$. Для применения теоремы 5.1 осталось установить, что

$$\left\|S_n\right\|\to 0 \text{ при } n\to\infty \ \left(S_n=H_n-P_nH\right).$$

Для $z_n=\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\chi_{jn}\in E_n$ имеем

$$P_nHz_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b h\left(s_{in},s\right)z_n\left(s\right)ds\right)\chi_{in}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{D_{jn}}h\left(s_{in},s\right)ds\,\zeta_j\right)\chi_{in}.$$

С другой стороны, с помощью (5.6) H_nz_n можно записать так:

$$H_n z_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{D_{jn}} h\left(s_{in}, s_{jn}\right) ds\, \zeta_j\right)\chi_{in} + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_{jn} h\left(s_{in}, s_{jn}\right)\zeta_j\right)\chi_{in},$$

$$\gamma_{jn} = \alpha_{jn} - \beta_{jn}.$$

Таким образом,

$$S_n z_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{D_{jn}}\left(h\left(s_{in}, s_{jn}\right) - h\left(s_{in}, s\right)\right) ds\, \zeta_j\right)\chi_{in} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_{jn} h\left(s_{in}, s_{jn}\right)\zeta_j\right)\chi_{in}.$$

Отсюда

$$\left\|S_n z_n\right\| \le \left[\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\int_{D_{jn}}\left|h\left(s_{in}, s_{jn}\right) - h\left(s_{in}, s\right)\right| ds + M\sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_{jn}\right|\right]\left\|z_n\right\|,$$

$$M = \max_{a\le t, s\le b}\left|h(t,s)\right|.$$

Применим квадратурную формулу (5.5) для функции $z_1(s) \equiv 1$:

$$b - a = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{jn} + R_n(z_1).$$

Так как $b - a = \sum_{j=1}^{n}\beta_{jn}$ и все числа γ_{jn}, $j = 1, ..., n$, одного знака, то

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_{jn}\right| = \left|R_n(z_1)\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \qquad (5.15)$$

Ввиду равномерной непрерывности функции $h(t,s)$, леммы 5.4 и соотношения (5.15) получаем, что $\left\|S_n\right\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Итак, теорема 5.1 применима. При $n \ge n_0$ уравнение $x_n = H_n x_n + f_n$ имеет единственное решение $x_n = \sum_{j=1}^{n}\xi_{jn}\chi_{jn}$, что равносильно однозначной разрешимости системы (5.10). Из сходимости $\|x_n - x_0\| \to 0$ (см. теорему 5.1) и неравенства

$$\max_{1 \le j \le n} \left| \xi_{jn} - x_0\left(s_{jn}\right) \right| = \|x_n - P_n x_0\| \le \|x_n - x_0\| \qquad (5.16)$$

вытекает (5.11). Оценка (5.12) следует из (5.8) теоремы 5.1 и (5.16). Заметим, что в данном случае $g_n = 0$ и $\|(P_n H - H_n P_n) x_0\| = r_n$, где r_n – определенное в формулировке теоремы число.

Теорема доказана.

По решению $(\xi_{1n}, ..., \xi_{nn})$ системы (5.10) можно различными способами строить аналитические приближения $\overline{x}_n(t)$ к $x_0(t)$. Наиболее естественно положить

$$\overline{x}_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} h\left(t, s_{jn}\right) \xi_{jn} + f(t).$$

6. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом коллокации

Приведем пример применения теоремы 4.1 к анализу метода коллокации решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv u^{(m)} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(t) u^{(k)} = f(t) \tag{6.1}$$

при линейных однородных краевых условиях

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(\alpha_{ik} u^{(k)}(a) + \beta_{ik} u^{(k)}(b) \right) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{6.2}$$

Пусть однородное уравнение $u^{(m)} = 0$ имеет при краевых условиях (6.2) только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$. Тогда существует последовательность многочленов

$$\varphi_j(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_{jk} t^k + t^{m+j}, \quad j = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

степени m, $m+1$, $m+2$, …, удовлетворяющих краевым условиям (6.2). Приближенное решение краевой задачи (6.1)–(6.2) будем искать в виде

$$u_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \varphi_j(t). \tag{6.3}$$

Метод коллокации заключается в том, что коэффициенты ξ_j определяются из условия обращения в нуль невязки $Lu_n - f$ в фиксированных $n+1$ точках $t_{0n}, t_{1n}, \ldots, t_{nn}$ (узлах интерполяции), т.е. из уравнений

$$u_n^{(m)}(t_{in}) - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(t_{in}) u_n^{(k)}(t_{in}) - f(t_{in}) = 0, \quad i = \overline{0,n}. \tag{6.4}$$

То есть для нахождения коэффициентов ξ_j нужно решить систему уравнений

$$\sum_{j=0}^{n}\left[\varphi_j^{(m)}\left(t_{in}\right)-\sum_{k=0}^{m-1}p_k\left(t_{in}\right)\varphi_j^{(k)}\left(t_{in}\right)\right]\xi_j=f\left(t_{in}\right),\quad i=\overline{0,n}. \qquad (6.5)$$

Для того чтобы найти решение $u(t)$ задачи (6.1)–(6.2), можно сначала искать его производную $x(t)=u^{(m)}(t)$. Затем $u(t)$ определится формулой

$$u(t)=\int_a^b G(t,s)x(s)ds, \qquad (6.6)$$

где $G(t,s)$ – функция Грина дифференциального оператора $Au=u^{(m)}$ при краевых условиях (6.2). Для определения функции $x(t)$ получим уравнение

$$x=Hx+f \qquad (6.7)$$

с интегральным оператором

$$Hx=\int_a^b h(t,s)x(s)ds,$$

где
$$h(t,s)=\sum_{j=0}^{m-1}p_j(t)\frac{\partial^j G(t,s)}{\partial t^j}.$$

Уравнение (6.7) эквивалентно краевой задаче (6.1)–(6.2).

Поиск приближенного решения $u_n(t)$ задачи (6.1)–(6.2) в виде (6.3) равносильно поиску приближенного решения $x_n(t)$ уравнения (6.7) в виде

$$x_n(t)=\sum_{j=0}^{n}\xi_j\varphi_j^{(m)}(t).$$

Уравнение (6.4) метода коллокации для определения коэффициентов ξ_j можно записать в виде

$$x_n=P_nHx_n+P_nf, \qquad (6.8)$$

где P_n – проектор, ставящий каждой непрерывной функции в соответствие ее интерполяционный многочлен степени n по узлам $t_{0n},t_{1n},\ldots,t_{nn}$. Действительно, $P_nz=0$ для любой такой функции $z(t)$, что $z\left(t_{in}\right)=0, i=\overline{0,n}$. Поэтому условия (6.4) означают, что $P_n\left(x_n-Hx_n-f\right)=0$. Но $x_n=u_n^{(m)}$ – многочлен степени $\le n$, значит, $P_n x_n = x_n$, получаем уравнение (6.8).

Сходимость или расходимость метода коллокации существенно зависит от выбора узлов интерполяции. Будем считать, что узлы интерполяции – корни некоторых ортогональных многочленов. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана такая неотрицательная суммируемая функция $\rho(t)$, что

$$\int_a^b \frac{ds}{\rho(s)} < \infty,$$

и пусть $\omega_n(t)$, $n=0, 1, 2, \ldots,$ – система многочленов, полученная ортогонализацией по скалярному произведению

$$(x,y)=\int_a^b \rho(s)x(s)y(s)ds$$

последовательности $1, t, t^2, \ldots$. В качестве узлов интерполяции $t_{0n}, t_{1n}, \ldots, t_{nn}$ выберем корни многочлена $\omega_{n+1}(t)$. Все эти корни простые и принадлежат $[a,b]$ ([7], с. 57).

В практических вычислениях часто пользуются узлами Чебышева. Если $a=-1, b=1$, узлы Чебышева определяются формулой

$$t_{in}=\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi, \quad i=\overline{0,n};$$

они соответствуют весовой функции $\rho(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. (В дальнейшем $\rho(t)$ – произвольная.)

В качестве пространства E выберем пространство $L_{2,\rho}$ квадратично-суммируемых с весом $\rho(t)$ функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\|_{L_{2,\rho}}^2=\int_a^b \rho(s)|x(s)|^2 ds.$$

Теорема 6.1. Пусть коэффициенты $p_j(t)$, $j=\overline{0,m-1}$, и свободный член $f(t)$ уравнения (6.1) непрерывны на $[a,b]$, пусть краевая задача (6.1)–(6.2) имеет единственное решение $u_0(t)$. Тогда при достаточно больших n система уравнений (6.5) однозначно разрешима, последовательности приближений $u_n(t)$ и их производные до порядка $m-1$ включительно стремятся при $n\to\infty$ равномерно к решению $u_0(t)$ и его производным соответствующего порядка, а последовательность $u_n^{(m)}(t)$ стремится к $u_0^{(m)}(t)$ среднеквадратично с весом $\rho(t)$. Справедливы оценки

$$\left\| u_n^{(m)} - u_0^{(m)} \right\|_{L_{2,\rho}} \le c e_n\left(u_0^{(m)}\right), \tag{6.9}$$

$$\max_{a\le t\le b}\left| u_n^{(k)} - u_0^{(k)} \right| \le c e_n\left(u_0^{(m)}\right), \quad k=\overline{0,m-1}, \tag{6.10}$$

где $e_n(z) = \min\limits_{\gamma_0,\dots,\gamma_n} \max\limits_{a\le t\le b}\left| z(t) - \sum\limits_{j=0}^{n}\gamma_j t^j \right|$ – наилучшее равномерное приближение функции $z(t)$ многочленами степени $\le n$.

Доказательство. H вполне непрерывен как оператор из L_2 в C и как оператор в $L_{2,\rho}$. С другой стороны, по теореме Эрдеша–Турана [6] интерполяционный многочлен Лагранжа любой непрерывной функции, построенный по рассматриваемым узлам, среднеквадратично с весом $\rho(t)$ стремится к приближаемой функции, т.е. $P_n \to P$ сильно, где P – оператор вложения C в $L_{2,\rho}$. По лемме 5.2 ($E=L_{2,\rho}$, $E'=C$) имеем $\left\| P^{(n)} H \right\|_{L_{2,\rho}} \to 0$ при $n\to\infty$. Оператор $I-H$ непрерывно обратим в $L_{2,\rho}$, так как однородное уравнение $x=Hx$ имеет лишь нулевое решение по условию теоремы об однозначной разрешимости краевой задачи (6.1)–(6.2).

По теореме 4.1 уравнение (6.8) имеет при достаточно больших n единственное решение x_n, а это равносильно однозначной разрешимости системы уравнений (6.5) метода коллокации. Преобразуем оценку (4.3). Для любого многочлена z_n степени $\le n$ имеем

$$\left\| P^{(n)} x_0 \right\|_{L_{2,\rho}} = \left\| (x_0 - z_n) - P_n (x_0 - z_n) \right\|_{L_{2,\rho}} \le$$

$$\le \left\| x_0 - z_n \right\|_{L_{2,\rho}} + \left\| P_n (x_0 - z_n) \right\|_{L_{2,\rho}} \le$$

$$\le \left(\left[\int_a^b \rho(t)\, dt \right]^{\frac{1}{2}} + \left\| P_n \right\|_{C \to L_{2,\rho}} \right) \left\| x_0 - z_n \right\|_C .$$

Так как $P_n \to P$ сильно, то нормы $\left\| P_n \right\|_{C \to L_{2,\rho}}$ ограничены в совокупности. Ввиду произвольности многочлена z_n имеем

$$\left\| P^{(n)} x_0 \right\|_{L_{2,\rho}} \le c e_n (x_0) .$$

Так как $x_n = u_n^{(m)}$, $x_0 = u_0^{(m)}$, то из (4.3) следует оценка (6.9). Оценки (6.10) являются следствием из (6.9). Утверждение теоремы о сходимости приближений $u_n(t)$ и их производных вытекает из оценок (6.9) и (6.10), так как $e_n(z) \to 0$ для любой непрерывной функции $z(t)$.

Теорема доказана.

7. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом моментов

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv Au - Ku = f, \tag{7.1}$$

где A, K – линейные операторы из банахова пространства E в гильбертово F с плотными в E областями определения $D(A) \subset D(K)$. Пусть A обратим, A^{-1} ограничен и определен на всем F, оператор KA^{-1} вполне непрерывен в F и 1 не является его собственным значением. Тогда L обратим; $L^{-1} = A^{-1}\left(I - KA^{-1}\right)^{-1}$ ограничен и определен на всем F.

Пусть $\{E_n\}$ и $\{F_n\}$ – две последовательности конечномерных подпространств, $E_n \subset D(A) \subset E$, $F_n \subset F$, P_n – ортопроектор F на F_n. Приближенное решение ищется из условия

$$P_n\left(Lu_n - f\right) = 0, \quad u_n \in E_n. \tag{7.2}$$

Это *метод Галеркина–Петрова*.

Теорема 7.1. Пусть последовательности $\{E_n\}$ и $\{F_n\}$ связаны соотношением

$$F_n = (I - S)AE_n, \tag{7.3}$$

где S – вполне непрерывный оператор в F, для которого 1 не является собственным значением. Пусть последовательность подпространств $\{AE_n\}$ предельно плотна в F. Тогда при достаточно больших n существует единственное удовлетворяющее условиям (7.2) приближение u_n и справедлива оценка

$$\left\|B\left(u_n - u_0\right)\right\| \le c\left\|R^{(n)}(I - S)^{-1}\left(BL^{-1}\right)^*\right\| \cdot \left\|R^{(n)}Au_0\right\|, \tag{7.4}$$

где u_0 – точное решение уравнения, $R^{(n)} = I - R_n$, R_n – ортопроектор из F на AE_n, B – любой линейный оператор с областью определения $D(B) \supset D(A)$ в E и областью значений в некотором банаховом пространстве E' и такой, что BL^{-1} – ограниченный оператор.

Приведем приложение теоремы 7.1 для краевых задач.

Рассмотрим снова линейное дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv u^{(m)} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(t) u^{(k)} = f(t) \tag{7.5}$$

при линейных однородных краевых условиях

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(\alpha_{ik} u^{(k)}(a) + \beta_{ik} u^{(k)}(b) \right) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{7.6}$$

Будем предполагать, что однородное уравнение $u^{(m)} = 0$ имеет при краевых условиях (7.6) только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$.

Метод моментов заключается в следующем. Приближенное решение краевой задачи (7.5)–(7.6) ищется в виде

$$u_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \varphi_j(t), \tag{7.7}$$

где $\varphi_j(t)$ – многочлен степени $m + j$, удовлетворяющий краевым условиям (7.6). Пусть, кроме Lu, задано еще второе дифференциальное выражение

$$Mu \equiv u^{(m)} - \sum_{j=0}^{m-1} q_j(t) u^{(j)}.$$

Постоянные ξ_j определяются из условий

$$\int_a^b (Lu_n - f) M\varphi_i \, dt = 0, \quad i = 0,...,n, \tag{7.8}$$

равносильных системе линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\int_a^b L\varphi_j M\varphi_i \, dt \right) \xi_j = \int_a^b f \, M\varphi_i \, dt, \quad i = 0,...,n. \tag{7.9}$$

Для практических вычислений интересны случаи $q_j(t) \equiv p_j(t)$ и $q_j(t) \equiv 0$, $j = 0,...,m-1$. В первом случае метод моментов переходит в метод наименьших квадратов, а второй случай интересен тем, что упрощает составление системы (7.9), так как тогда можно считать, что $M\varphi_i = t^i, \quad i = 0,1,...$[1].

[1] Более справедливо называть (7.7)–(7.9) *методом обобщенных моментов*, сохранив название «метод моментов» для случая $q_j(t) \equiv 0$, $j = 0, \ldots, m-1$.

Через $L_2^{(i)}$ $(i \geq 0)$ будем обозначать множество $i-1$ раз абсолютно непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $u(t)$ таких, что $u^{(i)}(t) \in L_2[a,b]$. Норма $\|u(t)\|$ ниже означает норму в $L_2^{(0)} = L_2[a,b]$.

Теорема 7.2. Пусть каждый коэффициент $p_j(t)$ непрерывно дифференцируем j раз, $f(t) \in L_2^{(0)}$ и $q_j(t) \in L_2^{(h)}$, j = 0, …, $m-1$, $0 \leq h \leq m$. Пусть каждое из однородных уравнений Lu = 0 и Mu = 0 имеет при краевых условиях (7.6) лишь нулевое решение.

Тогда при достаточно больших n система уравнений (7.9) однозначно разрешима и справедливы оценки

$$\left\| u_n^{(j)} - u_0^{(j)} \right\|_{L_{2,\rho}} \leq c n^{j-m} l_n\left(u_0^{(m)}\right), \quad j = m-h, \ldots, m, \tag{7.10}$$

$$\max_{a \leq t \leq b} \left| u_n^{(j)} - u_0^{(j)} \right| \leq c n^{j-m+1/2} l_n\left(u_0^{(m)}\right), \quad j = m-h, \ldots, m-1, \tag{7.11}$$

где $u_0(t)$ – точное решение краевой задачи (7.5)–(7.6), а $l_n(z) = \min\limits_{\gamma_0, \ldots, \gamma_n} \left\| z(t) - \sum\limits_{j=0}^{n} \gamma_j t^j \right\|$ – наилучшее среднеквадратичное приближение функции $z(t)$ многочленами степени $\leq n$.

При доказательстве используется следующая оценка среднеквадратичного приближения функций:

$$l_n(z) \leq c_i n^{-i} \left\| z^{(i)}(t) \right\|, \quad z(t) \in L_2^{(i)}. \tag{7.12}$$

Доказательство. Краевую задачу (7.5)–(7.6) рассмотрим как уравнение (7.1) в пространстве $E = F = L_2[a,b]$, положив

$$Au = u^{(m)}, \; Ku = \sum_{k=0}^{m-1} p_k(t) u^{(k)}$$

и взяв в качестве области определения $D(A) = D(K)$ множество функций из $L_2^{(m)}$, удовлетворяющих краевым условиям (7.6).

Как известно,

$$A^{-1}x=\int_a^b G(t,s)x(s)ds,$$

где $G(t,s)$ – функция Грина дифференциального выражения $u^{(m)}$ при краевых условиях (7.6). Операторы

$$KA^{-1}x=\int_a^b T(t,s)x(s)ds \quad \left(T(t,s)=\sum_{k=0}^{m-1} p_k(t)\frac{\partial^k G(t,s)}{\partial t^k}\right)$$

и

$$Sx=\int_a^b S(t,s)x(s)ds \quad \left(S(t,s)=\sum_{k=0}^{m-1} q_k(t)\frac{\partial^k G(t,s)}{\partial t^k}\right)$$

вполне непрерывны в $L_2[a,b]$ как интегральные операторы с квадратично-суммируемыми ядрами. Число 1 не является собственным значением операторов KA^{-1} и S. Действительно, если бы, например, уравнение $x=Sx$ имело ненулевое решение x, то функция $u=A^{-1}x$ оказалась бы нетривиальным решением уравнения $Mu=0$ при краевых условиях (7.6), что по условию теоремы невозможно.

Метод моментов (7.7)–(7.8) – это метод Галеркина–Петрова (7.2), в котором E_n – линейная оболочка многочленов $\varphi_0(t),...,\varphi_n(t)$, а F_n – линейная оболочка функций $M\varphi_0(t),..., M\varphi_n(t)$. Эти подпространства связаны соотношением (7.3). Подпространство AE_n состоит из многочленов степени $\le n$, и последовательность $\{AE_n\}$ предельно плотна в $L_2[a,b]$. Таким образом, применима теорема 7.1.

Определенный в теореме 7.1 проектор R_n в данном случае проектирует ортогонально в подпространство многочленов степени $\le n$, т.е. $\left\|R^{(n)}z\right\|=l_n(z)$. Оценки (7.10) выведем из оценки (7.4), показав, что для действующих в $L_2[a,b]$ операторов $B_j=\dfrac{d^j}{dt^j}$ справедливы неравенства

$$\left\|R^{(n)}(I-S)^{-1}\left(B_jL^{-1}\right)^*\right\|\le cn^{j-m},\ j=m-h,...,m.$$

Ввиду (7.12) для этого достаточно, чтобы операторы

$$B_{m-j}\left(I-S\right)^{-1}\left(B_jL^{-1}\right)^{*},\ j=m-h,...,m, \tag{7.13}$$

были определены на всем $L_2\left[a,b\right]$ и ограничены. Наметим доказательство этого факта.

Пусть $K\left(t,s\right)$ – функция Грина дифференциального выражения Lu при краевых условиях (7.6). Так как коэффициенты $p_j\left(t\right)$, $j=0,...,m-1$, непрерывно дифференцируемы j раз, то $K\left(t,s\right)$ имеет в квадрате $a\le t,s\le b$ непрерывные смешанные производные порядков $\le m-2$, а производные порядка $m-1$ и m терпят при $t=s$ конечный разрыв. Отсюда можно вывести, что $B_i\left(B_jL^{-1}\right)^{*}$ при $i+j\le m$ является ограниченным и определенным на всем $L_2\left[a,b\right]$ оператором. Это означает, в частности, что $\left(B_jL^{-1}\right)^{*}$ переводит $L_2\left[a,b\right]$ в $L_2^{(m-j)}$, $j=0,...,m$.

С другой стороны, можно проверить, что в силу условия $q_j\left(t\right)\in L_2^{(h)}$, $j=0,...,m-1$, оператор $\left(I-S\right)^{-1}$ переводит каждое из множеств $L_2^{(m-j)}$, $j=m-h,...,m$, в себя, причем имеют место неравенства

$$\left\|B_{m-j}\left(I-S\right)^{-1}z\right\|\le c'\sum_{i=0}^{m-j}\left\|B_iz\right\|,\ z\in L_2^{(m-j)},\ j=m-h,...,m.$$

Из изложенного выше следуют ограниченность операторов (7.13) в $L_2\left[a,b\right]$ и справедливость оценок (7.10).

Оценки (7.11) являются следствием оценок (7.10) и неравенства

$$\max_{a\le t\le b}\left|z\left(t\right)\right|\le\left[\frac{\left\|z\left(t\right)\right\|^2}{b-a}+2\left\|z\left(t\right)\right\|\cdot\left\|z'\left(t\right)\right\|\right]^{\frac{1}{2}},\ z\left(t\right)\in L_2^{(1)}.$$

Теорема доказана.

8. Приближенное решение дифференциальных уравнений в частных производных методом моментов

Пусть X и Y – нормированные пространства, в каждом из них выделено полное подпространство $X_n \in X$ и $Y_n \in Y$. Будем предполагать, что имеется непрерывный линейный оператор Φ_n, проектирующий Y на Y_n. Рассмотрим два уравнения:

– точное:

$$Lx \equiv Ax - \mu Kx = f; \tag{8.1}$$

– соответствующее ему приближенное:

$$L_n x_n \equiv Ax_n - \mu K_n x_n = \Phi_n f. \tag{8.2}$$

Здесь операторы A и K (и L) – непрерывные линейные операторы, отображающие X в Y, а оператор K_n (и L_n) – непрерывный линейный оператор X_n в Y_n. Предполагаем, что:

1) оператор A имеет непрерывный обратный;

2) оператор A устанавливает взаимно однозначное соответствие между X_n и Y_n, т.е. $A(X_n) = Y_n$ и, следовательно, $A^{-1}(Y_n) = X_n$.

Пусть выполняются условия:

Iб. Для всякого $x_n \in X_n$ имеет место неравенство

$$\|\Phi_n K x_n - K_n x_n\| \le \varepsilon \|x_n\|.$$

IIб. Для каждого $x \in X$ найдется такое $y_n \in Y_n$, что

$$\|Kx - y_n\| \le \varepsilon_1 \|x\|.$$

IIIб. Существует элемент $f_n \in Y_n$ такой, что

$$\|f - f_n\| \le \varepsilon_2 \|f\|.$$

Рассмотрим граничную задачу для уравнения

$$\Delta u + \mu a u = v \tag{8.3}$$

в области D, ограниченной кривой Γ, с граничным условием

$$u\big|_{\Gamma} = 0 \tag{8.4}$$

для случая $m = 2; 3$ измерений.

Приведем некоторые теоремы.

Теорема Гюнтера–Корна. Если u – решение уравнения

$$\Delta u = f,\ u\big|_{\Gamma} = 0, \tag{8.5}$$

где Γ – гладкий контур, f удовлетворяет условию Липшица с показателем β и постоянной M $\left(f \in Lip_M \beta\right)$, $u(x,y)$ имеет вторые частные производные, удовлетворяющие условию Липшица с любым показателем $\beta' < \beta$, при этом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in Lip_{M'} \beta', \quad M' \le cM.$$

Теорема о полноте. Пусть имеется область D, ограниченная контуром Γ, который определяется уравнением $\omega(x,y)=0$, ω – кусочно-непрерывная дифференцируемая функция, при этом

$$\omega(x,y) > 0,\ (x,y) \in D;\ \mathrm{grad}\,\omega(x,y) \ne 0,\ (x,y) \in \Gamma. \tag{8.6}$$

Тогда система функций вида $u_n(x,y) = \omega(x,y) P(x,y)$, P – полином, полна в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^{(1)}$ (т.е. в пространстве функций из $W_2^{(1)}$, обращающихся в нуль на Γ).

Теорема Харрик. Пусть функция ω удовлетворяет условиям теоремы о полноте, но при этом k раз непрерывно дифференцируема и ее k-е производные удовлетворяют условию Липшица с показателем α. Тогда существует последовательность полиномов R_n степени не выше n таких, что функции ωR_n аппроксимируют функцию u вместе с ее производными,

$$\left\| u - \omega R_n \right\|_{C^{(r)}} = O\left(\frac{1}{n^{k+\alpha-r}} \right),$$

где
$$\left\| u \right\|_{C^{(r)}} = \sum_{i=0}^{r} \sum_{\nu_1+\nu_2=i} \max_D \left| \frac{\partial^i u}{\partial x^{\nu_1} \partial y^{\nu_2}} \right|.$$

Приближенное решение граничной задачи (8.3)–(8.4) будем искать в виде

$$u_n(x,y)=\omega(x,y)P(x,y), \tag{8.7}$$

где P – полином степени не выше n, а функция ω удовлетворяет условиям теоремы Харрик при $k=1$. Коэффициенты полинома P определяются из системы уравнений

$$\iint_D (\Delta u_n+\mu a u_n)\zeta_j dxdy=\iint_D v\zeta_j dxdy, \quad j=\overline{1,N}. \tag{8.8}$$

Введем пространство U функций u, дважды непрерывно дифференцируемых и обращающихся в нуль на Γ с метрикой и скалярным произведением, определяемым по формулам

$$\|u\|=\left[\iint_D |\Delta u|^2\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (u_1,u_2)=\iint_D \Delta u_1 \Delta u_2 dx\,dy.$$

За подпространство U_n возьмем множество функций вида u_n. В качестве пространства V примем пространство функций вида $v=\Delta u, u\in U$, т.е. таких v, для которых существует решение уравнения $\Delta u=v$, принадлежащее U. В пространстве V примем метрику гильбертова пространства $L_2(D)$. За V_n возьмем совокупность функций вида $v_n=\Delta u_n, u_n\in U_n$.

При таких определениях граничную задачу (8.3)–(8.4) можно рассматривать как функциональное уравнение вида

$$Au+\mu Ku=v, \quad Au=\Delta u, \quad Ku=au. \tag{8.9}$$

При этом метрики в пространствах U и V согласованы так, что A осуществляет изометрическое отображение U и V.

В качестве $\zeta_1,\ldots,\zeta_N$ может быть взята любая линейно независимая система функций в V_n, например,

$$\zeta_{ij}=\Delta\left[\omega(x,y)x^i y^j\right], \quad i+j\le n.$$

Тогда, если под Φ_n понимать ортогональную проекцию V на V_n, то равенство $\Phi_n v=0$ эквивалентно системе уравнений

$$(v,\zeta_k)=\iint_D v\zeta_k dxdy=0, \quad k=\overline{1,n}.$$

Поэтому система (8.8) в новых обозначениях может быть записана в виде

$$\Phi_n A u_n + \mu \Phi_n K u_n = \Phi_n v, \tag{8.10}$$

т.е. приближенное уравнение построено специальным образом и условие (Iб) выполняется при $\varepsilon = 0$.

Для проверки условия (IIб) покажем, что для $u \in U$ будет $Ku = au \in Lip\beta$, где $\beta < 1$ в случае $m = 2$ и $\beta < \frac{1}{2}$ в случае $m = 3$.

Действительно, так как $u \in U$, то $u \in W_2^{(2)}$. Тогда по замечанию к теореме вложения ([2], XI.4.4) $u \in Lip\beta$, где $\beta < 1$ в случае $m = 2$ и $\beta < \frac{1}{2}$ в случае $m = 3$. Отсюда по теореме Гюнтера–Корна следует, что $z = A^{-1}Ku = \Delta^{-1}au$ имеет вторые производные, принадлежащие $Lip\beta'$, где $\beta' < \beta$, т.е. опять $\beta' < 1$ для $m = 2$ и $\beta < \frac{1}{2}$ для $m = 3$. При этом

$$\left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right\|_{Lip\beta'} \le c\|u\|.$$

В таком случае по теореме Харрик функция z допускает аппроксимацию вместе со вторыми производными посредством функций вида u_n порядка $\frac{1}{n^{\beta'}}$, а это обеспечивает оценку

$$\left\| A^{-1}Ku - u_n \right\| \le \frac{c_1}{n^{\beta'}}.$$

Таким образом, условие (IIб) выполнено с $\varepsilon_1 = O\left(\frac{1}{n^{\beta'}}\right)$.

Если $v \in Lip\beta$, в частности, если $v \in W_2^{(2)}$, то, аналогично рассуждая, получим, что $\varepsilon_2 = O\left(\frac{1}{n^{\beta'}}\right)$.

Таким образом, имеет место сходимость метода моментов с основными функциями указанного вида, причем сходимость в метрике U

$$\left\| u^* - u_n^* \right\|_U = O\left(\frac{1}{n^{\beta'}}\right).$$

Теорема 8.1. Если выполнены условия:

1) X – полное пространство;

2) $P_n \to I$ на X, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n x = x \quad (x \in X)$;

3) оператор H компактен;

то постоянные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ в условиях II, III, можно выбрать так, что $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим граничную задачу для уравнения

$$\Delta u + \mu\left(au + b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\right) = v \qquad (8.11)$$

при условии

$$u\big|_{\Gamma} = 0. \qquad (8.12)$$

Предполагаем, что коэффициенты a, b, c – непрерывно дифференцируемые функции.

Будем искать решение в виде (8.7). Коэффициенты определим из системы

$$\iint\limits_D \left(\Delta u_n + \mu\left(au_n + b\frac{\partial u_n}{\partial x} + c\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)\right)\zeta_j dxdy = \iint\limits_D v\zeta_j dxdy, \quad j = \overline{1, N}.$$

Функции ζ_j имеют вид

$$\zeta_j = \omega(x, y) P_j(x, y),$$

где $P_j(x, y)$ – полиномы степени не выше n. Метрику в U введем следующим образом:

$$(u_1, u_2) = \iint\limits_D \left[\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y}\right] dxdy,$$

$$\|u\|^2 = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy.$$

В V вводим метрику соответствующим образом, т.е.

$$(v_1, v_2)_V = \left(A^{-1}v_1, A^{-1}v_2\right)_U, \quad \|v\|_V = \left\|A^{-1}v\right\|_U.$$

Рассматриваемая граничная задача (8.11)–(8.12) может быть записана в форме функционального уравнения

$$Au + \mu Ku = v, \quad Au = \Delta u, \quad Ku = au + b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y},$$

а приближенное уравнение принимает вид

$$Au_n + \mu\Phi_n Ku_n = \Phi_n v.$$

Для того чтобы использовать теорему 8.1, проверим компактность оператора $A^{-1}K$.

Пространство U линейно изометрично плотной части пространства $\overset{0}{W}{}_2^{(1)}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно в качестве одной из возможных метрик в $W_2^{(1)}$ взять норму

$$\|u\|_{W_2^{(1)}} = \left|\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,d\Gamma\right| + \left(\iint\limits_{D} |\operatorname{grad} u|^2\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_U,$$

поэтому оператор K можно рассматривать как непрерывный линейный оператор, отображающий пространство $\overset{0}{W}{}_2^{(1)}$ в L_2. В силу неравенства Бернштейна–Ладыженской обратный оператор Δ^{-1}, рассматриваемый как оператор из L_2 в $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}$, непрерывен (см. [4], гл. II, § 6). Следовательно, $\Delta^{-1}K \in B\left(\overset{0}{W}{}_2^{(1)}, \overset{0}{W}{}_2^{(2)}\right)$. Оператор вложения $\overset{0}{W}{}_2^{(2)}$ в $\overset{0}{W}{}_2^{(1)}$

компактен ([2], XI.4.5, с. 452), следовательно, $\Delta^{-1}K$, рассматриваемый как оператор из $\overset{0}{W}{}_2^{(1)}$ в $\overset{0}{W}{}_2^{(1)}$, также компактен.

По теореме о полноте последовательность проекций $P_n = A^{-1}\Phi_n A$ сходится к тождественному оператору на U. Таким образом, применима теорема 8.1, на основании которой можно говорить о сходимости метода в пространстве U. Отсюда может быть получена и равномерная сходимость приближенных решений к точному.

9. Интегрирование в нормированных пространствах

Пусть E – линейное нормированное пространство, R – множество точек действительной прямой. Оператор $x = x(t)$ вообще нелинейный, отображающий R в E, называется абстрактной функцией числового аргумента t.

Пусть $t \in [a,b]$. Рассматриваются всевозможные разбиения $A = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$ отрезка $[a,b]$ на отрезки $[t_i, t_{i+1}]$, $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Разбиение $B = [s_0, s_1, \ldots, s_m]$ называется измельчением разбиения A, если каждый из отрезков $[s_k, s_{k+1}]$ есть часть одного из отрезков $[t_i, t_{i+1}]$. Если все отрезки разбиения A имеют длины, не превосходящие некоторого $\delta > 0$, $t_{i+1} - t_i \le \delta$, то A называют δ-разбиением $[a,b]$, обозначают A_δ.

Назовем интегральной суммой $S(A, x(t))$ абстрактной функции $x(t)$ по разбиению A сумму

$$S(A, x(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)(t_{i+1} - t_i). \tag{9.1}$$

Рассмотрим функцию $x(t)$, $t \in [a,b]$, $x \in E$, где E – полное пространство, и последовательность δ_n-разбиений $\{A_{\delta_n}\}$ отрезка $[a,b]$ таких, что $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Построим интегральные суммы $S(A_{\delta_n}, x(t))$. Если при $n \to \infty$ эти суммы стремятся к пределу

$$S = \lim_{n \to \infty} S(A_{\delta_n}, x(t)),$$

причем предел S не зависит от выбора системы разбиений A_{δ_n}, то этот предел называется *интегралом Римана* от функции $x(t)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b x(t)\,dt$.

Лемма 9.1. Если разбиение B отрезка $[a,b]$ есть измельчение δ-разбиения $A = A_\delta$ этого отрезка, то

$$\left\| S\left(A, x(t)\right) - S\left(B, x(t)\right) \right\| \le \omega(\delta)(b-a), \tag{9.2}$$

где
$$\omega(\delta) = \sup_{|\tau_1 - \tau_2| \le \delta} \left\| x(\tau_1) - x(\tau_2) \right\|. \tag{9.3}$$

Лемма 9.2. Пусть A_δ и A_ε – произвольные δ- и ε-разбиения отрезка $[a,b]$. Тогда

$$\left\| S\left(A_\delta, x(t)\right) - S\left(A_\varepsilon, x(t)\right) \right\| \le \left(\omega(\delta) + \omega(\varepsilon)\right)(b-a). \tag{9.4}$$

Теорема 9.1. Если $x(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то интеграл Римана $\int\limits_a^b x(t)\,dt$ существует.

Доказательство. Рассмотрим последовательность δ_n-разбиений $\left\{A_{\delta_n}\right\}$ отрезка $[a,b]$ таких, что $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для соответствующих интегральных сумм $S\left(A_{\delta_n}, x(t)\right)$ согласно лемме 9.2 имеет место неравенство

$$\left\| S\left(A_{\delta_n}, x(t)\right) - S\left(A_{\delta_{n+p}}, x(t)\right) \right\| \le \left(\omega(\delta_n) + \omega\left(\delta_{n+p}\right)\right)(b-a),$$

причем правая часть неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу равномерной непрерывности функции $x(t)$. Таким образом, последовательность $\left\{S\left(A_{\delta_n}, x(t)\right)\right\}$ – фундаментальная. Но так как $S\left(A_{\delta_n}, x(t)\right) \in E$ и E – полное пространство, то эта последовательность имеет в E предельный элемент S.

Пусть теперь дана другая последовательность ε_n-разбиений $\left\{A_{\varepsilon_n}\right\}$ отрезка $[a,b]$ таких, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. В силу предыдущего $\left\{S\left(A_{\varepsilon_n}, x(t)\right)\right\}$ при $n \to \infty$ сходится к некоторому предельному элементу S_ε. Докажем, что $S_\varepsilon = S$.

Объединим обе последовательности разбиений в последовательность $A_{\delta_1}, A_{\varepsilon_1}, A_{\delta_2}, A_{\varepsilon_2}, \ldots$. Соответствующие этой последовательности интегральные суммы

$$S\left(A_{\delta_1}, x(t)\right), S\left(A_{\varepsilon_1}, x(t)\right), \ldots$$

образуют сходящуюся последовательность, и ее предел $S_{\delta+\varepsilon}$ равен пределам S и S_{ε} подпоследовательностей $\left\{S\left(A_{\delta_n}, x(t)\right)\right\}$ и $\left\{S\left(A_{\varepsilon_n}, x(t)\right)\right\}$. Следовательно,

$$S = S_{\varepsilon} = S_{\delta+\varepsilon}.$$

Теорема доказана.

10. Дифференцирование в нормированных пространствах

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $y = f(x)$ – оператор, определенный в X с областью значений в Y.

Пусть h – произвольный элемент пространства X, предположим, что существует линейный оператор $A \in [X, Y]$ (вообще зависящий от x) такой, что

$$f(x+h) - f(x) = Ah + a(x,h), \tag{10.1}$$

где
$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|a(x,h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{10.2}$$

В этом случае Ah называется *сильным дифференциалом*, или *дифференциалом Фреше*, оператора $f(x)$ в точке x, соответствующим приращению h аргумента, и обозначается $df(x,h)$.

Линейный оператор A, вообще зависящий от x, обозначается $f'(x)$ и называется *сильной производной*, или *производной Фреше*. Тогда

$$df(x,h) = f'(x)h$$

и

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(\|h\|). \tag{10.3}$$

Слабым дифференциалом (*дифференциалом Гато*) функции $f(x)$ в точке x называют выражение

$$Df(x,h) = \frac{d}{dt} f(x+th)\bigg|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

в предположении, что предел, стоящий в правой части равенства и понимаемый в смысле сходимости по норме, существует.

Теорема 10.1. Если существует сильный дифференциал $df(x,h)$, то существует и слабый $Df(x,h)$ и $df(x,h) = Df(x,h)$.

Доказательство.
$$f(x+th) - f(x) = df(x,th) + a(x,th) = t\,df(x,h) + a(x,th).$$

Из (10.2) следует, что

$$\|a(x,th)\| = o(\|th\|) = o(|t|\|h\|) = o(t)$$

есть величина порядка малости высшего, чем t при $t \to 0$. Поэтому

$$\frac{f(x+th)-f(x)}{t} = df(x,h) + \frac{a(x,th)}{t} \to df(x,h) \text{ при } t \to 0.$$

Итак,

$$Df(x,h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = df(x,h).$$

Теорема доказана.

В определении слабого дифференциала не входит требование линейности. Однако если дифференциал $Df(x,h)$ линейный, то

$$Df(x,h) = f_c'(x)h,$$

и функция $f_c'(x)$ называется *слабой производной*, или *производной Гато*, оператора $f(x)$.

Теорема 10.2. Если в шаре $\|x - x_0\| < r$ существует слабый дифференциал $Df(x,h)$, равномерно непрерывный по x и непрерывный по h, то в нем существует и сильный дифференциал $df(x,h)$, причем $df(x,h) = Df(x,h)$.

Доказательство. При $\|h\| < r(x)$, где число $r(x)$ – это радиус шаровой окрестности точки x, принадлежащей шару $\|x - x_0\| < r$, во всех точках $x_t = x + th$, $0 \le t \le 1$, существует дифференциал $Df(x_t,h)$. Так как

$$Df(x_t,h) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(x_t+\Delta th)-f(x_t)}{\Delta t}$$

и
$$x_t + \Delta th = x + (t+\Delta t)h = x_{t+\Delta t},$$

то
$$Df(x_t,h) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(x_{t+\Delta t})-f(x_t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}f(x_t) = \frac{d}{dt}f(x+th).$$

Докажем аддитивность дифференциала $Df(x,h)$ по аргументу h:

$$Df(x,h_1+h_2)=Df(x,h_1)+Df(x,h_2). \qquad (10.4)$$

В силу предположенной непрерывности функции

$$Df(x_t,h)=\frac{d}{dt}f(x+th)$$

имеем

$$f(x+th_1)-f(x)=\int_0^t \frac{d}{d\tau}f(x+\tau h_1)\,d\tau=\int_0^t Df(x+\tau h_1,h_1)\,d\tau=$$
$$=tDf(x,h_1)+\omega_1, \qquad (10.5)$$

где
$$\omega_1=\int_0^t\left[Df(x+\tau h_1,h_1)-Df(x,h_1)\right]d\tau.$$

Аналогично

$$f(x+t(h_1+h_2))-f(x)=tDf(x,h_1+h_2)+\omega_2, \qquad (10.6)$$

где
$$\omega_2=\int_0^t\left[Df(x+\tau(h_1+h_2),h_1+h_2)-Df(x,h_1+h_2)\right]d\tau,$$

и
$$f(x+t(h_1+h_2))-f(x+th_1)=tDf(x,h_2)+\omega_3, \qquad (10.7)$$

где
$$\omega_3=\int_0^t\left[Df(x+th_1+\tau h_2,h_2)-Df(x,h_2)\right]d\tau.$$

Так как $Df(x,h)$ непрерывен по x, то для произвольного $\varepsilon>0$ при достаточно малом $t>0$ и $0\le\tau\le t$

$$\left\|Df(x+\tau h_1,h_1)-Df(x,h_1)\right\|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left\|Df(x+\tau(h_1+h_2),h_1+h_2)-Df(x,h_1+h_2)\right\|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left\|Df(x+th_1+\tau h_2,h_2)-Df(x,h_2)\right\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому

$$\|\omega_1\| = \left\| \int_0^t \left[Df(x+\tau h_1, h_1) - Df(x, h_1) \right] d\tau \right\| < \frac{\varepsilon}{3} t,$$

и аналогично

$$\|\omega_2\| < \frac{\varepsilon}{3} t, \ \|\omega_3\| < \frac{\varepsilon}{3} t.$$

Из (10.5), (10.6), (10.7) следует

$$0 = \left[f(x+th_1) - f(x) \right] + \left[f\left(x + t(h_1+h_2)\right) - f(x+th_1) \right] -$$
$$-\left[f\left(x + t(h_1+h_2)\right) - f(x) \right] =$$
$$= t\left[Df(x,h_1) + Df(x,h_2) - Df(x,h_1+h_2) \right] + \omega_1 + \omega_3 - \omega_2.$$

Отсюда

$$Df(x,h_1) + Df(x,h_2) - Df(x,h_1+h_2) = \frac{1}{t}(-\omega_1 - \omega_3 + \omega_2),$$

следовательно,

$$\left\| Df(x,h_1) + Df(x,h_2) - Df(x,h_1+h_2) \right\| \le \frac{1}{t}\left(\|\omega_1\| + \|\omega_2\| + \|\omega_3\| \right) < \varepsilon.$$

Так как ε выбрано произвольно, то

$$\left\| Df(x,h_1) + Df(x,h_2) - Df(x,h_1+h_2) \right\| = 0,$$

(10.4) доказано. Так как $Df(x,h)$ непрерывен по h, то он линейный и ограниченный относительно h оператор: $Df(x,h) = f_c'(x)h$. Так как $Df(x,h)$ равномерно непрерывен относительно x, то $f_c'(x)$ равномерно непрерывен относительно x.

Докажем, что

$$f(x+h) - f(x) = f_c'(x)h + o(\|h\|). \qquad (10.8)$$

Тогда $Df(x,h)$ (как главная линейная относительно h часть приращения $f(x+h) - f(x)$) будет совпадать с $df(x,h)$. Имеем

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+th)\,dt=\int_0^1 Df(x+th,h)\,dt=$$

$$=\left(\int_0^1 f_c'(x+th)\,dt\right)h=f_c'(x)h+\omega, \qquad (10.9)$$

где
$$\omega=\left(\int_0^1 \left(f_c'(x+th)-f_c'(x)\right)dt\right)h.$$

Вследствие равномерной непрерывности $f_c'(x)$ имеем при $0 \le t \le 1$

$$\left\|f_c'(x+th)-f_c'(x)\right\| \le \alpha(\|h\|) \to 0 \text{ при } \|h\| \to 0.$$

Отсюда

$$\|\omega\| \le \left\|\int_0^1 \left(f_c'(x+th)-f_c'(x)\right)dt\right\|\|h\| \le \int_0^1 \left\|f_c'(x+th)-f_c'(x)\right\|dt\|h\| \le \alpha(\|h\|)\|h\|,$$

равенство (10.8) доказано.

Таким образом, $df(x,h)=Df(x,h)$, $f_c'(x)=f'(x)$, что требовалось доказать.

11. Метод Ньютона–Канторовича

Рассмотрим уравнение

$$Kx = 0, \tag{11.1}$$

где K – дифференцируемый по Фреше нелинейный оператор, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y. Основной метод построения последовательных приближений x_n к решению x^* (если оно существует) уравнения (11.1) основан на последовательной линеаризации уравнения.

Допустим, что приближение x_n найдено. Тогда для отыскания последующего приближения x_{n+1} уравнение (11.1) заменяют линеаризованным в точке x_n уравнением

$$Kx_n + K'(x_n)(x - x_n) = 0. \tag{11.2}$$

Если определен действующий из Y в X линейный оператор $\left[K'(x_n)\right]^{-1}$, то можем записать

$$x_{n+1} = x_n - \left[K'(x_n)\right]^{-1} Kx_n,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ . \tag{11.3}$$

Определяемый формулой (11.3) метод последовательных приближений называют *методом Ньютона–Канторовича*. Основное неудобство метода (11.3) заключается в том, что его применение требует на каждом шаге решения линейного уравнения со своим линейным оператором $K'(x_n)$. Поэтому для построения последовательных приближений часто используют близкие к (11.2), но отличные от них линейные уравнения

$$Kx_n + K'(x_0)(x - x_n) = 0,$$

где x_0 – начальное приближение. Тогда последовательные приближения определяются формулой

$$x_{n+1} = x_n - \left[K'(x_0)\right]^{-1} Kx_n,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ . \tag{11.4}$$

Метод, описываемый формулой (11.4), называют *модифицированным методом Ньютона–Канторовича*.

Отметим, что сходимость метода существенно зависит от выбора x_0.

Теорема 11.1. Пусть в точке x_0 оператор $K'(x_0)$ непрерывно обратим и пусть в сфере $S(x_0,r)$, $r=\dfrac{\eta_0}{1-q}$, для любых $x_1,x_2\in S(x_0,r)$

$$\sup_{x_1,x_2\in S(x_0,r)}\left\|\left[K'(x_0)\right]^{-1}\right\|\left\|\left(K'(x_1)-K'(x_2)\right)\right\|=q<1.$$

Тогда последовательные приближения (11.4) сходятся к решению x^* уравнения (11.1) с погрешностью

$$\left\|x^*-x_n\right\|\le\frac{q^n\eta_0}{1-q},$$

где $\eta_0=\left\|\left[K'(x_0)\right]^{-1}Kx_0\right\|$.

Доказательство.

1. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$, определяемая (11.4), сходится. Пусть $x_n\to x^*$ при $n\to\infty$.

2. Докажем, что x^* – решение уравнения (11.1), т.е. $Kx^*=0$.

3. Оценим $\left\|x^*-x_n\right\|$.

1. Воспользуемся критерием Коши сходимости последовательностей и свойством полноты. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\quad\forall n>N\quad\forall p\in\mathrm{N}\quad\left\|x_{n+p}-x_n\right\|<\varepsilon.$$

$$\left\|x_{n+p}-x_n\right\|=\left\|x_{n+p}-x_{n+p-1}+x_{n+p-1}-\ldots-x_{n+1}+x_{n+1}-x_n\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{p-1}\left\|x_{n+k+1}-x_{n+k}\right\|. \tag{11.5}$$

Из (11.4)

$$\|x_{n+1}-x_n\| = \left\|\left[K'(x_0)\right]^{-1} Kx_n\right\| =$$

$$= \left\|\left[K'(x_0)\right]^{-1}\left(Kx_n - Kx_{n-1} - K'(x_0)(x_n - x_{n-1})\right)\right\| \le$$

$$\le \left\|\left[K'(x_0)\right]^{-1}\right\| \left\|Kx_n - Kx_{n-1} - K'(x_0)(x_n - x_{n-1})\right\| \le$$

$$\le \left\|\left[K'(x_0)\right]^{-1}\right\| \left\|\left(K'\left(x_{n-1} + \theta(x_n - x_{n-1})\right) - K'(x_0)\right)(x_n - x_{n-1})\right\| \le$$

$$\le \left\|\left[K'(x_0)\right]^{-1}\right\| \left\|\left(K'\left(x_{n-1} + \theta(x_n - x_{n-1})\right) - K'(x_0)\right)\right\| \left\|(x_n - x_{n-1})\right\|. \quad (11.6)$$

Пусть последовательные приближения принадлежат некоторой сфере $S(x_0, r)$. Точки $x_{n-1} + \theta(x_n - x_{n-1}) \in S(x_0, r)$. Тогда из (11.6)

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le q\|x_n - x_{n-1}\| \le q^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \le \ldots \le q^n \|x_1 - x_0\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Перейдем к (11.5)

$$\left\|x_{n+p} - x_n\right\| \le \sum_{k=0}^{p-1} \left\|x_{n+k+1} - x_{n+k}\right\| \le \sum_{k=0}^{p-1} q^{n+k} \|x_1 - x_0\| \le \|x_1 - x_0\| \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} =$$

$$= \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|.$$

Существует такое *N*, что при $n > N$ $\frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\| < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная. Так как пространство X – полное, существует предел этой последовательности $x^* \in X$.

2. Рассмотрим последовательные приближения (11.4)

$$x_{n+1} = x_n - \left[K'(x_0)\right]^{-1} Kx_n.$$

$$\left\|Kx^* - Kx_n\right\| = \left\|K'(\xi)\left(x^* - x_n\right)\right\| \le \left\|K'(\xi)\right\| \left\|x^* - x_n\right\|,$$

так как $\left\|x^* - x_n\right\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\left\|Kx^* - Kx_n\right\| \to 0$, т.е. $Kx_n \to Kx^*$. Тогда из (11.4) при $n \to \infty$ получим

$$x^* = x^* - \left[K'(x_0)\right]^{-1} Kx^*.$$

Следовательно, $Kx^* = 0$.

3. $\left\|x^* - x_n\right\| = \left\|\sum_{k=n}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)\right\| \le \sum_{k=n}^{\infty} q^k \left\|x_1 - x_0\right\| \le \frac{q^n}{1-q}\left\|x_1 - x_0\right\| =$

$$= \frac{q^n}{1-q}\left\|\left[K'(x_0)\right]^{-1} Kx_0\right\|.$$

Теорема доказана.

Сфера, внутри которой находятся все последовательные приближения,

$$\left\|x_n - x_0\right\| \le \frac{1}{1-q}\left\|x_1 - x_0\right\| \quad \forall n.$$

12. Общая теория приближенных методов для нелинейных операторных уравнений второго рода

Рассмотрим уравнение

$$x = Tx, \tag{12.1}$$

где T – нелинейный оператор в банаховом пространстве E, определенный и непрерывный на некотором непустом открытом множестве $\Omega \subset E$. Пусть $\{E_n\}$ – последовательность замкнутых подпространств E; $\Omega_n = \Omega \cap E_n$.

Пусть на каждом Ω_n задан непрерывный оператор T_n со значениями в E_n. Тогда решения уравнений

$$x_n = T_n x_n \tag{12.2}$$

принимают за приближенные решения уравнения (12.1).

Пусть на E задана последовательность линейных проекционных операторов P_n, каждый из которых проектирует на соответствующее E_n. Операторы P_n могут быть и неограниченными; в этом случае предполагаем, что $T(\Omega) \subset D(P_n)$, где $D(P_n)$ – область определения операторов P_n, и что операторы P_nT непрерывны на Ω.

Близость уравнений (12.1) и (12.2) будем характеризовать «малостью» операторов

$$S_n = T_n - P_nT\,,\ U_n = T - P_nT\,.$$

Уравнение $x_n = P_nTx_n$ называют *уравнением Галеркина*, уравнение (12.2) – *возмущенным уравнением Галеркина*; приближенный метод, использующий уравнение (12.2), – *методом Галеркина с возмущениями*.

Лемма 12.1. Пусть A – оператор в банаховом пространстве F, дифференцируемый по Фреше при $\|x - x_*\| \le \delta$, где x_* – некоторая фиксированная точка F, $\delta > 0$. Пусть линейный оператор $A'(x_*)$ непрерывно обратим в F, причем при некоторых δ_0 и q ($0 < \delta_0 \le \delta$; $0 \le q < 1$) соблюдаются неравенства

$$\sup_{\|x-x_*\|\le\delta_0}\left\|\left[A'(x_*)\right]^{-1}\left[A'(x)-A'(x_*)\right]\right\|\le q, \tag{12.3}$$

$$\alpha\equiv\left\|\left[A'(x_*)\right]^{-1}Ax_*\right\|\le\delta_0(1-q). \tag{12.4}$$

Тогда уравнение $Ax=0$ имеет в шаре $\|x-x_*\|\le\delta_0$ единственное решение x_0 и справедливы оценки

$$\frac{\alpha}{1+q}\le\|x_0-x_*\|\le\frac{\alpha}{1-q}. \tag{12.5}$$

Доказательство. Если оператор T дифференцируем в каждой точке отрезка $[x_1,x_1+h]$, то

$$\|T(x_1+h)-Tx_1\|\le\|h\|\sup_{0<\theta<1}\|T'(x_1+\theta h)\|.$$

Пусть $T=V(A-W)$, где V и W – любые линейные непрерывные операторы в F. Тогда предыдущее неравенство примет вид

$$\left\|V\left(A(x_1+h)-Ax_1-Wh\right)\right\|\le\|h\|\sup_{0<\theta<1}\left\|V\left(A'(x_1+\theta h)-W\right)\right\|. \tag{12.6}$$

Уравнение $Ax=0$ равносильно уравнению $x=Bx$,

где $$Bx=x_*-\left[A'(x_*)\right]^{-1}\left(Ax_*+\left[Ax-Ax_*-A'(x_*)(x-x_*)\right]\right). \tag{12.7}$$

Покажем, что оператор B – оператор сжатия на шаре $\|x-x_*\|\le\delta_0$. При $\|x-x_*\|\le\delta_0$ в силу (12.3), (12.4), (12.6) имеем

$$\|Bx-x_*\|\le\delta_0(1-q)+\|x-x_*\|\sup_{0<\theta<1}\left\|\left[A'(x_*)\right]^{-1}\left(A'(x_*+\theta(x-x_*))-A'(x_*)\right)\right\|\le$$

$$\le\delta_0(1-q)+\delta_0 q=\delta_0, \tag{12.8}$$

т.е. B переводит шар $\|x-x_*\|\le\delta_0$ в себя. Пусть x_1 и x_2 – две точки шара $\|x-x_*\|\le\delta_0$. Тогда

$$Bx_1 - Bx_2 = \left[A'(x_*)\right]^{-1}\left[Ax_2 - Ax_1 - A'(x_*)(x_2 - x_1)\right],$$

откуда на основе (12.3) и (12.6) находим

$$\|Bx_1 - Bx_2\| \le \|x_2 - x_1\| \sup_{0<\theta<1} \left\| \left[A'(x_*)\right]^{-1} \left(A'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) - A'(x_*)\right) \right\| \le$$

$$\le q\|x_1 - x_2\|,$$

т.е. B сжимает шар $\|x - x_*\| \le \delta_0$.

Следовательно, оператор B имеет в шаре $\|x - x_*\| \le \delta_0$ единственную неподвижную точку x_0. Это единственное решение уравнения $Ax = 0$ в указанном шаре. Из определения оператора B вытекают следующие неравенства для нормы $\|x_0 - x_*\| = \|Bx_0 - x_*\|$:

$$\|x_0 - x_*\| \le \alpha + \|x_0 - x_*\| q, \ \|x_0 - x_*\| \ge \alpha - \|x_0 - x_*\| q.$$

Эти неравенства равносильны оценкам (12.5). Лемма доказана.

Обозначим $P^{(n)} = I - P_n$. Если $x \in \Omega$ и $P^{(n)}x \to 0$ при $n \to \infty$, то $P_n x \in \Omega_n$ при достаточно больших n.

Теорема 12.1. Пусть операторы T и $P_n T$ дифференцируемы[1] по Фреше в Ω, а T_n – в Ω_n. Пусть уравнение (12.1) имеет решение $x_0 \in \Omega$, причем линейный оператор $I - T'(x_0)$ непрерывно обратим в E. Пусть при $n \to \infty$ имеют место соотношения

$$\left\|P^{(n)} x_0\right\| \to 0, \tag{12.9}$$

$$\|P_n T P_n x_0 - T x_0\| \to 0, \ \|P_n T'(P_n x_0) - T'(x_0)\| \to 0, \tag{12.10}$$

$$\|S_n P_n x_0\| \to 0, \ \|S_n'(P_n x_0)\| \to 0. \tag{12.11}$$

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существуют n_ε и $\delta_\varepsilon > 0$ такие, что

$$\|T_n'(x) - T_n'(P_n x_0)\| \le \varepsilon \ \left(n \ge n_\varepsilon; \|x - P_n x_0\| \le \delta_\varepsilon, x \in \Omega_n\right). \tag{12.12}$$

[1] Предполагается, что $(P_n T)'(x) = P_n T'(x)$. В случае ограниченного проектора P_n дифференцируемость $P_n T$ вытекает из дифференцируемости T, и указанное равенство выполнено.

Тогда найдутся n_0 и $\delta_0 > 0$ такие, что при $n \geq n_0$ уравнение (12.2) имеет в шаре $\|x - x_0\| \leq \delta_0$ единственное решение x_n. Имеет место соотношение

$$\|x_n - x_0\| \leq \left\|P^{(n)} x_0\right\| + \|x_n - P_n x_0\| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \qquad (12.13)$$

причем для $\|x_n - P_n x_0\|$ справедлива двусторонняя оценка $(c_1, c_2 > 0)$

$$c_1 \|P_n T x_0 - T_n P_n x_0\| \leq \|x_n - P_n x_0\| \leq c_2 \|P_n T x_0 - T_n P_n x_0\|. \qquad (12.14)$$

Доказательство. Применим лемму 12.1 при $F = E_n$, $A = I - T_n$, $x_* = P_n x_0$.

Точка x_0 входит в открытое множество Ω вместе с некоторой окрестностью. Так как $P_n x_0 \to x_0$ при $n \to \infty$, то при достаточно больших n (при $n \geq n_*$) $P_n x_0 \in \Omega$ вместе с некоторым шаром $\|x - P_n x_0\| \leq \delta_*$ пространства E, а в Ω_n – с таким же шаром пространства E_n.
При $n \geq n_*$ оператор $I - T_n$ дифференцируем в шаре $\|x - P_n x_0\| \leq \delta_*$.

Из обратимости $I - T'(x_0)$ и из (12.10) следует, что при достаточно больших n операторы $I - P_n T'(P_n x_0)$ обратимы в E, причем нормы обратных операторов ограничены в совокупности. Следовательно, операторы $I - P_n T'(P_n x_0)$ обратимы на E_n и нормы обратных операторов ограничены в совокупности. Отсюда заключаем (на основе (12.11)), что при достаточно больших n в E_n обратимы также операторы $I - T_n'(P_n x_0)$ и нормы обратных операторов ограничены в совокупности:

$$\left\|\left(I - T_n'(P_n x_0)\right)^{-1}\right\| \leq \chi \ (n \geq n_*). \qquad (12.15)$$

Из (12.10) и (12.11) следует ограниченность в совокупности норм операторов

$$\left\|I - T_n'(P_n x_0)\right\| \leq \chi' \ (n \geq n_*).$$

Таким образом, для чисел

$$\alpha_n = \left\| \left(I - T_n'(P_n x_0) \right)^{-1} (I - T_n) P_n x_0 \right\|$$

получаем двустороннюю оценку

$$\frac{1}{\chi'} \| P_n T x_0 - T_n P_n x_0 \| \le \alpha_n \le \chi \| P_n T x_0 - T_n P_n x_0 \| \ (n \ge n_*). \quad (12.16)$$

Так как $T x_0 = x_0$ и

$$P_n T x_0 - T_n P_n x_0 = (P_n T x_0 - T x_0) + (T x_0 - P_n T P_n x_0) - S_n P_n x_0,$$

по (12.9)–(12.11)

$$\| P_n T x_0 - T_n P_n x_0 \| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \quad (12.17)$$

Зафиксируем некоторое $q \ (0 < q < 1)$, положим $\varepsilon_0 = \dfrac{q}{\chi}$ и определим по этому ε_0 числа n_0 и δ_0 $(n_0 \ge n_*; 0 < \delta_0 \le \delta_*)$ такие, чтобы при $n \ge n_0$ и $\| x - P_n x_0 \| \le \delta_0$ соблюдалось неравенство (12.12) с $\varepsilon = \varepsilon_0$. Тогда выполнено условие (12.3) леммы 12.1; за счет увеличения n_0 можно добиться (см. (12.16) и (12.17)), чтобы при $n \ge n_0$ выполнялось условие (12.4) леммы 12.1. Из этой леммы следует, что при $n \ge n_0$ уравнение (12.2) имеет в шаре $\| x - P_n x_0 \| \le \delta_0$ единственное решение x_n.

С учетом (12.16) оценка (12.5) перепишется в виде (12.14), причем $\tilde{n}_1 = \dfrac{1}{\chi'(1+q)}$, $\tilde{n}_2 = \dfrac{\chi}{1-q}$. Неравенство (12.13) очевидно, а сходимость правой части неравенства к нулю уже установлена (см. (12.9) и (12.17)). Итак, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. За счет уменьшения δ_0 можно добиться, чтобы x_n было единственным решением уравнения (12.2) в шаре $\| x - x_0 \| \le \delta_0$ пространства E.

Теорема доказана.

Теорема 12.2. Пусть операторы T, $P_n T$, T_n дифференцируемы по Фреше в некоторой окрестности[1] точки $\tilde{x}_n \in \Omega_n$, причем $I - T_n'(\tilde{x}_n)$ непрерывно обратим в E_n,

[1] Достаточно, чтобы $P_n T$, T_n были дифференцируемы лишь в точке $\tilde{x}_n$; $P_n T$ – как оператор в E.

$$\left\| \left[I - T_n'(\tilde{x}_n) \right]^{-1} \right\| = \chi_n. \qquad (12.18)$$

Пусть

$$\gamma_n \equiv \left(1 + \chi_n \left\| P_n T'(\tilde{x}_n) \right\| \right) \left\| U_n'(\tilde{x}_n) \right\| + \chi_n \left\| S_n'(\tilde{x}_n) \right\| < 1 \qquad (12.19)$$

и при некоторых δ_n, q_n $(\delta_n > 0; 0 \le q_n < 1)$ соблюдаются неравенства

$$\sup_{\|x - \tilde{x}_n\| \le \delta_n} \left\| T'(x) - T'(\tilde{x}_n) \right\| \le \frac{q_n}{\chi_n'}, \qquad (12.20)$$

$$\left\| \tilde{x}_n - T\tilde{x}_n \right\| \le \frac{\delta_n (1 - q_n)}{\chi_n'}, \qquad (12.21)$$

где
$$\chi_n' = \frac{1 + \chi_n \left\| P_n T'(\tilde{x}_n) \right\|}{1 - \gamma_n}. \qquad (12.22)$$

Тогда уравнение (12.1) имеет в шаре $\|x - \tilde{x}_n\| \le \delta_n$ единственное решение x_0 и справедлива оценка погрешности

$$\frac{\alpha_n}{1 + q_n} \le \left\| \tilde{x}_n - x_0 \right\| \le \frac{\alpha_n}{1 - q_n}, \qquad (12.23)$$

где
$$\alpha_n \equiv \left\| \left[I - T_n'(\tilde{x}_n) \right]^{-1} (\tilde{x}_n - T\tilde{x}_n) \right\| \le \chi_n' \left\| \tilde{x}_n - T\tilde{x}_n \right\|. \qquad (12.24)$$

Доказательство. Из (12.18) и (12.19) на основе леммы 5.3 следует, что оператор $I - T'(\tilde{x}_n)$ обратим в *E*, причем

$$\left\| \left[I - T'(\tilde{x}_n) \right]^{-1} \right\| = \chi_n', \qquad (12.25)$$

где χ_n' – определенное соотношением (12.22) число. Применим лемму 12.1 при $F = E$, $A = I - T$, $x_* = \tilde{x}_n$. Условия (12.20) и (12.21) гарантируют выполнение условий (12.3) и (12.4) леммы, а оценка (12.5) леммы запишется в виде (12.23); оценка (12.24) для α_n следует из (12.25).

Теорема доказана.

13. Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений методом механических квадратур

13.1. Вращение вполне непрерывного векторного поля

Вращение – это целочисленная топологическая характеристика векторных полей на границах ограниченных областей.

Пусть Ω – ограниченная область в n-мерном пространстве R^n; S – граница Ω. Пусть на S задано непрерывное векторное поле Φx без нулевых векторов. Тогда определено непрерывное отображение $\|\Phi x\|^{-1}\Phi x$ границы S области Ω на единичную сферу $\|x\|=1$ пространства R^n. Степень этого отображения называют *вращением поля* Φ на S и обозначают его через $\gamma(\Phi;S)$.

Векторное поле $\Phi x = x - Ax$ называется *вполне непрерывным*, если A – вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве E.

Пусть Ω – ограниченная область в E, S – граница Ω. Пусть вполне непрерывное векторное поле Φx задано на S и не имеет на S нулевых векторов. Тогда говорят, что поле Φx *невырождено* на S.

Обозначим через E_ε конечномерное подпространство пространства E, содержащее некоторую ε-сеть $y_1,\ldots,y_k$ компактного множества AS. Положим

$$P_\varepsilon y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\mu_i(y)y_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}\mu_i(y)}, \quad y\in AS,$$

где
$$\mu_i(y)=\begin{cases}\varepsilon-\|y-y_i\|, & \text{åñëè} \quad \|y-y_i\|\le\varepsilon,\\ 0, & \text{åñëè} \quad \|y-y_i\|\ge\varepsilon.\end{cases}$$

Нелинейный оператор P_ε определен на AS и проектирует это компактное множество на E_ε. Легко видеть, что $\|Ax-P_\varepsilon Ax\|\le\varepsilon, \quad x\in S$. Через S_ε обозначим границу пересечения $\Omega\cap E_\varepsilon$, а через γ_ε – вращение конечномерного (в пространстве E_ε) поля $x-P_\varepsilon Ax$ на S_ε. Если E_ε не имеет общих точек с Ω, то положим $\gamma_\varepsilon=0$.

При достаточно малых ε (при $\varepsilon<\alpha$, где $\inf\limits_{x\in S}\|x-Ax\|=\alpha>0$) числа γ_ε одинаковы – они не зависят ни от ε, ни от выбора ε-сети, ни от выбора содержащего эту сеть подпространства. Общее значение чисел γ_ε называют *вращением вполне непрерывного поля* Φx на S и обозначают (как и в конечномерном случае) через $\gamma(\Phi;S)$.

Пусть теперь Ω – непустое открытое ограниченное множество в вещественном банаховом пространстве F, Γ – его граница. Пусть A – вполне непрерывный на $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$ оператор в F, не имеющий на Γ неподвижных точек. Справедливы следующие **утверждения**:

1. Если $\gamma(I-A;\Gamma)\neq 0$, то уравнение $x=Ax$ имеет в Ω хотя бы одно решение.

2. Пусть B – другой вполне непрерывный на $\overline{\Omega}$ оператор в F такой, что $\sup\limits_{x\in\Gamma}\|Bx\|<\inf\limits_{x\in\Gamma}\|x-Ax\|$. Тогда $\gamma(I-A;\Gamma)=\gamma(I-A-B;\Gamma)$.

Отметим, что $\inf\limits_{x\in\Gamma}\|x-Ax\|>0$. Действительно, в противном случае найдется такая последовательность $x_n\in\Gamma$, что $x_n-Ax_n\to 0$ при $n\to\infty$. Ввиду полной непрерывности A можно считать, что последовательность Ax_n сходится к некоторому пределу z. Но тогда к тому же пределу сходится последовательность x_n, и получается, что $z\in\Gamma$, $z-Az=0$, т.е. A имеет на Γ неподвижную точку, вопреки условию.

3. Пусть $A\overline{\Omega}\subset\tilde{F}$, где $\tilde{F}$ – замкнутое подпространство F. Тогда $\gamma(I-A;\Gamma)=\gamma\left(I-\tilde{A};\tilde{\Gamma}\right)$, где $\tilde{A}$ – сужение A на подпространство $\tilde{F}$, а $\tilde{\Gamma}$ – граница множества $\Omega\cap\tilde{F}$ в $\tilde{F}$. (Может случиться, что $\Omega\cap\tilde{F}=\varnothing$. В этом случае $\gamma(I-A;\Gamma)=0$, и утверждение остается в силе, если по определению положить $\gamma\left(I-\tilde{A};\varnothing\right)=0$.)

4. Пусть $x_0\in\Omega$ – решение уравнения $x=Ax$, единственное в шаре $\|x-x_0\|\leq\delta_0$, полностью содержащемся в Ω. Обозначим через Γ_δ сферу $\|x-x_0\|=\delta$. Тогда $\gamma(I-A;\Gamma_\delta)=\gamma\left(I-A;\Gamma_{\delta_0}\right)$ при любом $\delta,0<\delta\leq\delta_0$.

Это общее значение вращений $\gamma(I-A;\Gamma_\delta)$ называется **индексом** изолированного решения x_0.

5. Пусть $x_0\in\Omega$ – решение уравнения $x=Ax$. Пусть оператор A дифференцируем по Фреше в точке x_0 и линейный оператор $I-A'(x_0)$ обратим. Тогда x_0 – изолированное решение ненулевого индекса. Более того, $|\gamma(I-A;\Gamma_\delta)|=1$.

6. Пусть область Ω выпукла. Пусть A преобразует в себя замыкание $\bar{\Omega}$ области Ω. Тогда из принципа Шаудера вытекает, что уравнение $x = Ax$ имеет в $\bar{\Omega}$ по крайней мере одно решение. Если A не имеет на Γ неподвижных точек, то $\gamma(I - A; \Gamma) = 1$.

13.2. Метод механических квадратур для нелинейных интегральных уравнений

Теорема 13.1. Пусть операторы T и $P_n T$ вполне непрерывны на $\bar{\Omega}$ как операторы в E, T_n – на $\bar{\Omega}_n$ как оператор в E_n, причем

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|U_n x\| \to 0 \text{ при } n \to \infty \quad (U_n = T - P_n T), \tag{13.1}$$

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|S_n x\| \to 0 \text{ при } n \to \infty \quad (S_n = T_n - P_n T). \tag{13.2}$$

Пусть уравнение $x = Tx$ не имеет на границе Γ множества Ω решений и

$$\gamma(I - A; \Gamma) \neq 0. \tag{13.3}$$

Тогда при достаточно больших n множество X_n решений x_n уравнения $x_n = T_n x_n$ в Ω_n непусто и

$$\sup_{x_n \in X_n} \rho(x_n, X_0) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где X_0 – множество решений уравнения $x = Tx$ в Ω.

Множество X_0 непусто в силу предположения (13.3).

Следствием из теоремы 13.1 является

Теорема 13.2. Пусть операторы T и $P_n T$ вполне непрерывны на шаре $\|x - x_0\| \le \delta$, а T_n – на пересечении этого шара с E_n. Пусть x_0 – изолированное решение уравнения $x = Tx$ ненулевого индекса, единственное в указанном шаре. Пусть выполнены условия (13.1) и (13.2), в которых $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_n$ – указанные выше шар и его пересечение с E_n.

Тогда найдется такое n_0, что при $n \ge n_0$ уравнение $x_n = T_n x_n$ имеет в шаре $\|x - x_0\| < \delta$ хотя бы одно решение x_n и любая последовательность таких решений x_n стремится при $n \to \infty$ по норме к x_0.

Утверждение 7. Пусть банахово пространство E' непрерывно вложено в E (т.е. $E' \subset E$, $\|x\|_E \le c\|x\|_{E'}$ $(x \in E')$). Пусть оператор T переводит $\bar{\Omega}$ в компактное в E' подмножество, а проекторы P_n ограничены как операторы из E' в E, причем $P_n \to P$ сильно, где P – оператор вложения пространства E' в E. Тогда выполняется условие (13.1).

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$x(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))\,ds + f(t) \tag{13.4}$$

с непрерывным ядром $K(t,s,x)$ и непрерывным свободным членом $f(t)$. Приближенные значения $\xi_{jn} \approx x_0(s_{jn})$, $j = \overline{1,n}$, искомого решения $x_0(t)$ определяем из системы уравнений

$$\xi_{in} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} K(s_{in}, s_{jn}, \xi_{jn}) + f(s_{in}),\ i = 1, \ldots, n. \tag{13.5}$$

Эта система выведена на основе квадратурной формулы

$$\int_a^b z(s)\,ds = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} z(s_{jn}) + R_n(z). \tag{13.6}$$

Предполагаем, что $\alpha_{jn} > 0$, и узлы интерполяции

$$a \le s_{1n} < s_{2n} < \ldots < s_{nn} \le b.$$

Теорема 13.3. Пусть квадратурный процесс (13.6) сходится, т.е. $R_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$ для любой непрерывной на $[a,b]$ функции $z(t)$. Пусть уравнение (13.4) имеет решение $x_0(t)$ и ядро $K(t,s,x)$ непрерывно по совокупности переменных при

$$a \le t, s \le b, \quad |x - x_0(s)| \le \delta \quad (\delta = \text{const} > 0), \tag{13.7}$$

а свободный член $f(t)$ непрерывен на $[a,b]$.

Тогда справедливы следующие два утверждения:

а) если решение $x_0(t)$ изолировано и ненулевого индекса (в пространстве C), то при достаточно больших n система уравнений (13.5) разрешима и

$$\max_{1 \le j \le n} \left|\xi_{jn} - x_0(s_{jn})\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty; \tag{13.8}$$

б) если ядро $K(t,s,x)$ имеет частную производную по x, непрерывную по совокупности переменных в области (13.7), и если линейное однородное интегральное уравнение

$$h(t)=\int_a^b K_0(t,s)h(s)ds \quad \left(K_0(t,s)=\frac{\partial K(t,s,x_0(s))}{\partial x} \right)$$

имеет лишь нулевое решение, то решение системы (13.5) при достаточно больших n существует и единственно, имеет место сходимость (13.8) и справедлива двусторонняя оценка

$$c_1 r_n \le \max_{1\le j\le n}\left|\xi_{jn}-x_0(s_{jn})\right| \le c_2 r_n, \tag{13.9}$$

где $c_1, c_2 = \text{const} > 0$,

$$r_n=\max_{1\le i\le n}\left|R_n(z_{in})\right|,\ z_{in}(s)=K(s_{in},s,x_0(s)),$$

$R_n(z)$ – остаточный член квадратурной формулы (13.6).

Доказательство. Пространства E и E_n и проектор P_n построим так же, как при доказательстве аналогичной теоремы для линейных интегральных уравнений (теорема 5.2). Уравнение (13.4) будем рассматривать как операторное уравнение $x=Tx$. Непрерывность ядра $K(t,s,x)$ в области (13.7) влечет за собой полную непрерывность оператора

$$Tx=\int_a^b K(t,s,x(s))ds+f(t)$$

на шаре $\bar{\Omega}(\|x-x_0\|\le\delta)$ как оператора из E в пространство C, а значит, и как оператора в E. В разделе 5 показано, что проекторы P_n как операторы из C в пространство E сильно стремятся к оператору вложения C в E. Отсюда следует (утверждение 7), что в рассматриваемом случае выполнено условие (13.1).

Система уравнений (13.5) равносильна уравнению $x_n=T_n x_n$, в котором оператор T_n определен на элементах $z_n=\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\chi_{jn}$ из множества $\bar{\Omega}_n=\bar{\Omega}\cap E_n$ формулой

$$T_n z_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jn}K(s_{in},s_{jn},\zeta_j)+f(s_{in})\right)\chi_{in}.$$

Приведем разность $T_n z_n - P_n T z_n = S_n z_n$ к виду

$$S_n z_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{D_{jn}}\left(K\left(s_{in},s_{jn},\zeta_j\right)-K\left(s_{in},s,\zeta_j\right)\right)ds\right)\chi_{in}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_{jn}K\left(s_{in},s_{jn},\zeta_j\right)\right)\chi_{in},$$

откуда, используя (5.6), лемму 5.4,

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_{jn}\right|=\left|R_n\left(z_1\right)\right|\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

а также равномерную непрерывность и ограниченность $K\left(t,s,x\right)$ в замкнутой области (13.7), получим соотношение (13.2).

В силу утверждения 3 индекс решения $x_0\left(t\right)$ уравнения (13.4) одинаков в пространствах C и E; по предположению он отличен от нуля. Утверждение (а) теоремы следует из теоремы 13.2. Заметим, что решение x_n уравнения $x_n = T_n x_n$ и решение $\left(\xi_{1n},\ldots,\xi_{nn}\right)$ системы (13.5) связаны соотношением $x_n = \sum_{j=1}^{n}\xi_{jn}\chi_{jn}$ и что

$$\max_{1\le j\le n}\left|\xi_{jn}-x_0\left(s_{jn}\right)\right|=\left\|x_n-P_n x_0\right\|\le\left\|x_n-x_0\right\|. \tag{13.10}$$

Перейдем к утверждению (б). Существование непрерывной в области (13.7) частной производной $\dfrac{\partial K\left(t,s,x\right)}{\partial x}$ влечет непрерывную дифференцируемость T в Ω как оператора из E в C, а тем более как оператора в E. Так как операторы P_n сильно сходятся к оператору вложения C в E, соблюдаются условия (12.9), (12.10) теоремы 12.1. Поскольку оператор

$$T'\left(x_0\right)h=\int_a^b K_0\left(t,s\right)h\left(s\right)ds$$

вполне непрерывен в E и уравнение $h = T'\left(x_0\right)h$ имеет по условию лишь нулевое решение, оператор $I - T'\left(x_0\right)$ непрерывно обратим.

Операторы T_n и S_n непрерывно дифференцируемы в Ω_n, причем для любых $z_n = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \chi_{jn} \in \Omega_n$ и $y_n = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \chi_{jn} \in E_n$ имеем

$$T'_n(z_n)\, y_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \frac{\partial K\left(s_{in}, s_{jn}, \zeta_j\right)}{\partial x} \eta_j \right) \chi_{in},$$

$$S'_n(z_n)\, y_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{D_{jn}} \frac{\partial \left(K\left(s_{in}, s_{jn}, \zeta_j\right) - K\left(s_{in}, s, \zeta_j\right)\right)}{\partial x} ds\, \eta_j \right) \chi_{in} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{jn} \frac{\partial K\left(s_{in}, s_{jn}, \zeta_j\right)}{\partial x} \eta_j \right) \chi_{in}.$$

Пользуясь равномерной непрерывностью и ограниченностью $\dfrac{\partial K(t,s,x)}{\partial x}$ в замкнутой области (13.7), можно показать, что выполняются условия (12.11), (12.12) теоремы 12.1. Теперь утверждение (б) следует из этой теоремы. В частности, оценка (13.9) вытекает из (12.14) теоремы 12.1 и соотношения (13.10); заметим, что $\left\| T_n P_n x_0 - P_n T x_0 \right\| = r_n$.

Теорема доказана.

По решению $\left(\xi_{1n}, ..., \xi_{nn}\right)$ системы (13.5) можно строить аналитические приближения $\overline{x}_n(t)$ к решению $x_0(t)$ уравнения (13.4), положив

$$\overline{x}_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} K\left(t, s_{jn}, \xi_{jn}\right) + f(t).$$

14. Приближенные методы в проблеме собственных значений

Рассмотрим в комплексном банаховом пространстве E уравнение

$$x = \mu H x. \tag{14.1}$$

Оператор H – линейный и вполне непрерывный. Известно, что спектр вполне непрерывного оператора состоит из счетного множества собственных значений.

Собственным значением оператора H называется комплексное число λ такое, что уравнение $Hx = \lambda x$ имеет ненулевое решение. Таким образом, собственное значение λ оператора H связано с собственным значением уравнения $x = \mu Hx$ соотношением $\lambda\mu = 1$.

Пусть μ_0 – собственное значение уравнения (14.1). Каждому собственному значению μ_0 отвечает подпространство X_0^1, состоящее из собственных элементов уравнения (14.1):

$$X_0^1 = \{x_0 \in E : x_0 - \mu_0 H x_0 = 0\}.$$

Построим последовательность подпространств:

$$X_0^j = \left\{x_0 \in E : (I - \mu_0 H)^j x_0 = 0\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Для вполне непрерывного оператора H все подпространства X_0^j конечномерны, и среди них имеется лишь конечное число различных, т.е. существует такое натуральное число l, что $X_0^{l-1} \neq X_0^l$ и $X_0^j = X_0^l$ при $j \geq l$. Число l называется *рангом* собственного значения μ_0, а число $\dim X_0^l$ – *кратностью* μ_0. Если $l = 1$ и $\dim X_0^1 = 1$, то собственное значение μ_0 называется *простым*; в противном случае – *кратным*. Элементы $x_0 \in X_0^l$ $(x_0 \neq 0)$ называются *корневыми* элементами уравнения (14.1); подпространство X_0^1 называется *собственным* подпространством, а X_0^l – *корневым* подпространством уравнения (14.1).

В случае, когда H – матрица, задача нахождения собственных значений и элементов достаточно хорошо изучена. Поэтому очень важным является переход от вполне непрерывного оператора H (не являющегося конечномерным) к матрице.

Поставим уравнению (14.1) в соответствие последовательность приближенных уравнений

$$x_n = \mu H_n x_n, \tag{14.2}$$

где H_n – линейные вполне непрерывные операторы в E_n, $\{E_n\}$ – последовательность замкнутых подпространств в E.

Пусть для операторов H, H_n, P_n выполняются следующие условия:

I. Для любого $x \in E$ $\|Hx - P_n Hx\| \le \eta_1 \|x\|$.

II. Для любого $x \in E$ $\|P_n H x_n - H_n x_n\| \le \eta_2 \|x_n\|$.

Утверждение 14.1. Пусть в замкнутом ограниченном множестве $\bar{\Omega}$ комплексной плоскости нет собственных значений уравнения (14.1). Тогда норма $\left\|(I - \mu H)^{-1}\right\|$ ограничена не зависящей от $\mu \in \bar{\Omega}$ постоянной.

Утверждение 14.2. Пусть уравнение (14.1) не имеет собственных значений в круге $|\mu - \mu_1| \le \delta$. Тогда $\sup\limits_{|\mu-\mu_1|\le\delta} \left\|(I - \mu H)^{-1}\right\|$ достигается в некоторой точке окружности $|\mu - \mu_1| = \delta$.

Теорема 14.1. Пусть выполнены условия I, II. Тогда для каждого собственного значения μ_0 уравнения (14.1) найдется последовательность μ_n собственных значений уравнений (14.2) такая, что $\mu_n \to \mu_0$ при $n \to \infty$.

Обратно, каждая предельная точка любой последовательности μ_n собственных значений уравнений (14.2) является собственным значением уравнения (14.1).

Доказательство. Пусть μ_0 – собственное значение уравнения (14.1), $\delta > 0$ – такое число, что в круге $|\mu - \mu_0| \le \delta$ нет других собственных значений уравнения (14.1), кроме μ_0. Возьмем произвольное $\varepsilon, 0 < \varepsilon \le \delta$. Норма $\left\|(I - \mu H)^{-1}\right\|$ на окружности $|\mu - \mu_0| = \varepsilon$ ограничена не зависящей от μ постоянной

$$\left\|(I - \mu H)^{-1}\right\| \le \chi.$$

Из условий I, II на основе леммы 5.2 следует, что при $|\mu - \mu_0| = \varepsilon$ и при достаточно больших n операторы $I - \mu H_n$ обратимы в E_n, причем нормы обратных операторов ограничены равномерно по μ и n

$$\left\| \left(I - \mu H_n \right)^{-1} \right\| \le \chi'. \tag{14.3}$$

Допустим, что уравнения (14.2) при $n = n_i$ $(i = 1,2,\ldots)$ не имеют собственных значений в круге $|\mu - \mu_0| \le \varepsilon$. Для указанных n неравенство (14.3) распространяется на весь круг $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$. В частности,

$$\left\| \left(I - \mu_0 H_{n_i} \right)^{-1} \right\| \le \chi'.$$

При достаточно больших n_i на основе леммы 5.3 получаем, что оператор $I - \mu_0 H$ обратим в E, т.е. μ_0 не является собственным значением уравнения (14.1) вопреки условию. Следовательно, начиная с некоторого $n = n(\varepsilon)$, уравнение (14.2) имеет в круге $|\mu - \mu_0| \le \varepsilon$ хотя бы одно собственное значение μ_n. Так как ε произвольно, то первое утверждение теоремы справедливо.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть R – сколь угодно большое, а $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число. В круг $|\mu| \le R$ попадает конечное число собственных значений уравнения (14.1), пусть это $\mu_0^1,\ldots,\mu_0^m$. Обозначим через $\Omega_{R,\varepsilon}$ замкнутое множество комплексной плоскости, получаемое из круга $|\mu| \le R$ удалением ε-окрестностей точек $\mu_0^1,\ldots,\mu_0^m$. В $\Omega_{R,\varepsilon}$ оператор $(I - \mu H)^{-1}$ ограничен равномерно по μ:

$$\left\| \left(I - \mu H \right)^{-1} \right\| \le \chi.$$

На основе леммы 5.2 отсюда делаем вывод, что при достаточно больших n (пусть это будет при $n \ge n_1$) и любом $\mu \in \Omega_{R,\varepsilon}$ операторы $I - \mu H_n$ обратимы в E_n. Значит, при $n \ge n_1$ те собственные значения уравнения (14.2), которые по модулю не превосходят число R, попадают в ε-окрестности точек $\mu_0^1,\ldots,\mu_0^m$. Так как R и ε произвольны, то второе утверждение теоремы справедливо.

Теорема доказана.

15. Итерационные методы решения интегральных уравнений в свертках

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \qquad (15.1)$$

Предполагаем, что образ Фурье функции $g(t)$ – функция $G(\omega)$ – при изменении ω в интервале $(-\infty,+\infty)$ обращается в нуль в конечном числе точек. Обоснование итерационных алгоритмов будем проводить в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$.

Будем обозначать через $G(\omega), X(\omega), F(\omega)$ преобразование Фурье функций $g(t), x(t), f(t)$.

Будем говорить, что выполнено **условие А**, если в плоскости комплексной переменной z множество значений $G(\omega)$ расположено внутри угла с вершиной в начале координат и с раствором, меньшим π, причем при конечных значениях ω функция $G(\omega)$ не равна нулю. Тогда найдется такая константа γ (в общем случае комплексная), что множество значений $\gamma G(\omega)$ будет расположено внутри и на окружности с центром в точке $(1,0)$ с радиусом, равным 1.

Пусть спектры входного и выходного сигналов расположены в сегменте $[-T,T]$ и выполнено условие А. Тогда найдется такая константа γ, при которой $\max\limits_{|\omega|\le T}|1-\gamma G(\omega)| = q < 1$.

Рассмотрим итерационный процесс:

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) - \gamma\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)x_n(\tau)d\tau - f(t)\right). \qquad (15.2)$$

Теорема 15.1. Пусть спектры входного и выходного сигналов расположены в сегменте $[-T,T]$ и выполнено условие А. Тогда последовательность $x_n(t)$ сходится к решению $x^*(t)$ уравнения (15.1) со скоростью $\left\|x^*(t) - x_n(t)\right\| = O\left(q^n\right)$.

Пусть выполнено условие А и носители функций $X(\omega), F(\omega)$ определены в интервале $(-\infty,+\infty)$.

Рассмотрим итерационный процесс:

$$x_{n+1}(t)=\alpha_n x_n(t)+(1-\alpha_n)\left(x_n(t)-\gamma\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)x_n(\tau)d\tau+\gamma f(t)\right), \quad (15.3)$$

где $0<\varepsilon_0\le\alpha_n\le 1-\varepsilon_1<1$, γ – константа, определенная из условия $\max\limits_{\omega}\left|1-\gamma G(\omega)\right|\le 1$.

Теорема 15.2. Пусть уравнение (15.1) имеет единственное решение $x^*(t)$ и выполнено условие А. Тогда последовательность $x_n(t)$, определяемая итерационной схемой (15.3), сходится к решению $x^*(t)$.

Рассмотрим итерационный процесс:

$$x_{n+1}^T(t)=x_n^T(t)-\gamma\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)x_n^T(\tau)d\tau-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_T(t-\tau)f(\tau)d\tau\right), \quad (15.4)$$

где образ Фурье функции $\psi_T(t)$ имеет следующий вид:

$$\Psi_T(\omega)=\begin{cases}1 & \text{ï ðè } |\omega|\le T,\\ 0 & \text{ï ðè î ñòàëüí û õ çí à÷åí èÿõ } \omega.\end{cases}$$

Теорема 15.3. Пусть выполнено условие А и уравнение (15.1) имеет единственное решение $x^*(t)$. Тогда итерационный процесс (15.4) сходится при любом начальном приближении $x_0(t)$ со спектром, сосредоточенным в сегменте $[-T,T]$, и справедлива оценка

$$\left\|x^*-x_n^T\right\|\le O\left(q^n\right)+\varepsilon+|\gamma|\left[\left(\int\limits_{-\infty}^{-T}|f(t)|^2dt+\int\limits_{T}^{+\infty}|f(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon\max|g(t)|\right]/(1-q), \quad (15.5)$$

где $q=\max\limits_{|\omega|\le T}\left|1-\gamma G(\omega)\right|$, $\varepsilon=\left(\int\limits_{-\infty}^{-T}\left|X^*(\omega)\right|^2d\omega+\int\limits_{T}^{+\infty}\left|X^*(\omega)\right|^2d\omega\right)^{\frac{1}{2}}$.

Пусть условие А не выполняется. Обозначим через T_0 и T_N достаточно большие по абсолютной величине числа, выбор которых определяется условием $\varepsilon=\left(\int\limits_{-\infty}^{-T_0}\left|X^*(\omega)\right|^2d\omega+\int\limits_{T_N}^{+\infty}\left|X^*(\omega)\right|^2d\omega\right)^{\frac{1}{2}}$. Введем сегменты $\Delta_k = [T_{k-1}, T_k]$, $k = \overline{1,N}$, где $-T = T_0 < T_1 < \ldots < T_N = T$, таким образом, чтобы при изменении ω в сегменте Δ_k, $k = \overline{1,N}$, приращение аргумента $G(\omega)$ было меньше π. Каждому сегменту Δ_k, $k = \overline{1,N}$, поставим в соответствие такую константу γ_k, при которой значения функций $\gamma_k G(\omega)$ при $\omega \in \Delta_k$ лежат внутри единичного круга с центром в точке $(1,0)$. Обозначим через $E_k(\omega)$, $k = \overline{1,N}$, характеристические функции сегментов Δ_k, $k = \overline{1,N}$, а через $x_k^*(t), x_{0k}(t), f_k(t)$ – прообразы функций $E_k(\omega) X^*(\omega), E_k(\omega) X_0(\omega), E_k(\omega) F(\omega)$.

Для нахождения входного сигнала $x^*(t)$ используем итерационный процесс:

$$x_{n+1,k}(t) = x_{n,k}(t) - \gamma_k \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) x_{n,k}(\tau) d\tau - f_k(t) \right), \qquad (15.6)$$

$k = \overline{1,N}$, $n = 0,1,\ldots$.

Определим $x_{n+1}(t)$ из выражения

$$x_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^{N} x_{n+1,k}(t). \qquad (15.7)$$

Теорема 15.4. Пусть уравнение (15.1) имеет решение $x^*(t)$. Тогда последовательные приближения $x_{n+1}(t)$ сходятся и справедлива оценка

$$\left\| x^*(t) - x_{n+1}(t) \right\| \le O\left(q^n\right) + \gamma \left(\int_{-\infty}^{T_0} \left| f(t) \right|^2 dt + \int_{T_N}^{+\infty} \left| f(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \varepsilon \left(1 + \max \left| g(t) \right| \right) / (1 - q),$$

где $q = \max\limits_{1 \le k \le N} q_k$, $\gamma = \max\limits_{1 \le k \le N} |\gamma_k|$, $\varepsilon = \left(\int_{-\infty}^{T_0} \left| X^*(\omega) \right|^2 d\omega + \int_{T_N}^{+\infty} \left| X^*(\omega) \right|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$.

Список литературы

1. Бойков, И. В. Аналитические методы идентификации динамических систем / И. В. Бойков. – Пенза : Пенз. политехн. ин-т, 1992.

2. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1984.

3. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко. – М. : Наука, 1969.

4. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1973.

5. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965.

6. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М. : Гостехиздат, 1951.

7. Сеге, Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – М. : Физматгиз, 1962.

Учебное издание

Елисеева Татьяна Владимировна

Прикладной
функциональный анализ

Редактор *О. Ю. Ещина*
Корректор *Ж. А. Лубенцова*
Компьютерная верстка *Н. В. Ивановой*

Подписано в печать 11.12.12.
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 4,65.
Тираж 50. Заказ № 967.

Издательство ПГУ
440026, Пенза, Красная, 40.
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru